Certamen 2 Análisis Complejo

Profesor: Pedro Montero, Ayudante: Emilio Oyanedel

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

Problema 1 (50 puntos)

El objetivo de este problema es probar que para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ se verifica que

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$

Para ello, podrá usar directamente (sin demostración) el siguiente resultado:

Hecho: Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una familia de funciones meromorfas en $\mathbb{C}$ (i.e., $f_n \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ para todo $n \in \mathbb{Z}$) tal que para todo compacto $K \subseteq \mathbb{C}$ el conjunto

$$I_K := \{n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } f_n \text{ posee polos en } K\} \subseteq \mathbb{Z}$$

es un conjunto finito, y tal que $\sum_{n\notin I_K} f_n$ es uniformemente convergente en K.

Entonces, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n(z)$ es una función holomorfa fuera de un conjunto de puntos aislados y define una función meromorfa en $\mathbb{C}$.

En todo lo que sigue, definamos

$$f(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$

(a) **(10 pts)** Probar que f es una función meromorfa en $\mathbb{C}$.

Observación: Dado que todo compacto es cerrado y acotado, basta verificar las hipótesis del Hecho anterior en cada disco cerrado $\overline{D}(0,R)$.

Solución: Sea $f_n(z) := \frac{1}{(z-n)^2}$ donde $n \in \mathbb{Z}$. Para todo $R > 0$ y todo disco $K := \overline{D}(0,R)$ se tiene que

$$I_K \overset{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } |n| \leq R\} \text{ es un conjunto finito.}$$

Además, si $z \in \overline{D}(0,R)$ y $n \notin I_K$ (i.e., $|n| > R$) entonces

$$|f_n(z)| = \frac{1}{|z-n|^2} \leq \frac{1}{(|n|-R)^2}.$$

Dado que la serie $\sum_{|n|>R} \frac{1}{(|n|-R)^2}$ es convergente, tenemos que $\sum_{n\notin I_K} f_n$ converge uniformemente en K. Así, el Hecho anterior implica que $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$.

(b) **(10 pts)** Probar que $f(z+1) = f(z)$ y $f(-z) = f(z)$, y probar que f tiene un polo doble en cada entero.

Indicación: Las primeras dos propiedades de f permiten reducir el análisis a estudiar $z_0 = 0$. Para concluir, puede probar que $F(z) := f(z) - \frac{1}{z^2}$ es límite uniforme de funciones holomorfas en $z_0 = 0$.

Solución: Dado que $\mathbb{Z}$ es un grupo y $w \mapsto w^2$ es una función par, deducimos[1] que $f(z) = f(z+1)$ y que $f(-z) = f(z)$. Además, la fórmula que define a f implica que los polos de f están contenidos en $\mathbb{Z}$.

Para ver que el conjunto de polos coincide con $\mathbb{Z}$ y que todo polo es doble notamos que, gracias que $f(z+n) = f(z)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, basta analizar $z_0 = 0$. Para ello, escribimos

$$f(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{1}{(z-n)^2} := \frac{1}{z^2} + F(z),$$

y notamos que para cada $n \neq 0$ la función f_n es holomorfa en $z_0 = 0$. Además, para $|z| \leq 1/2$ el cálculo en el ítem (a) implica que $|f_n(z)| \leq \frac{1}{(|n|-\frac{1}{2})^2} = \frac{4}{(2|n|-1)^2}$. Así, $F \overset{\text{def}}{=} \sum_{n\neq 0} f_n$ es límite uniforme de funciones holomorfas en $z_0 = 0$, y por ende F es holomorfa en $z_0 = 0$ y, por periodicidad, en cada $z_0 = n \in \mathbb{Z}$.

[1] Alternativamente, basta reemplazar en la fórmula de f y hacer cambios de variables en las series respectivas.

(c) **(10 pts)** Determinar el desarrollo en serie de Laurent de la función f en $z_0 = 0$. Para ello, podrá expresar su resultado en función de los valores de la función zeta de Riemann evaluada en los números pares positivos

$$\zeta(2m) := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{2m}} \text{ donde } m \geq 1.$$

Solución: Por (b), $f(z) = \frac{1}{z^2} + F(z)$ con F holomorfa en $z_0 = 0$. Luego, basta aplicar la fórmula de Taylor

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n = \sum_{m\geq 0} a_{2m} z^{2m} \quad \text{con } a_{2m} = \frac{1}{(2m)!} F^{(2m)}(0).$$

Dado que $f_n(z) = (z-n)^{-2}$ verifica que $f_n^{(2m)}(z) = (2m+1)!(z-n)^{-2-2m}$, tenemos que

$$F^{(2m)}(0) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} (2m+1)!(-n)^{-2-2m} \overset{\text{def}}{=} 2(2m+1)!\zeta(2m+2)$$

y por ende $f(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{m\geq 0}(4m+2)\zeta(2m+2)z^{2m}$ es la serie de Laurent de f en $z_0 = 0$.

(d) **(10 pts)** Sea $F(z) := f(z) - \frac{1}{z^2}$. Probar que $|F(z)| \leq \dfrac{C}{|\operatorname{Im}(z)|}$ para cierta constante $C \in \mathbb{R}^{>0}$, y deducir que

$$|f(x+iy)| \longrightarrow 0 \text{ cuando } |y| \longrightarrow +\infty.$$

Indicación: Notar que $\overline{F(z)} = F(\overline{z})$, *por lo que puede asumir que* $y > 0$. *Además, el punto* (b) *nos permite asumir que* $|x| \leq \frac{1}{2}$, *de donde se tiene que* $|z-n|^2 \geq (|n|-|x|)^2 + y^2 \geq (|n|-\frac{1}{2})^2 + y^2$. *Para obtener la cota pedida, puede usar convenientemente el hecho que*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2 + y^2} \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+y^2}\, \mathrm{d}t.$$

Solución: Como se observó en la indicación, podemos asumir que $y > 0$ y que $|x| \leq \frac{1}{2}$, de donde se tiene

$$|F(x+iy)| \leq \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{1}{(n-x)^2+y^2} \leq \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{1}{(|n|-|x|)^2+y^2} \leq 2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2+y^2} \leq 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+y^2}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{y}$$

y por ende $|f(x+iy)| \leq \frac{1}{y^2} + \frac{\pi}{y} \longrightarrow 0$ cuando $y \longrightarrow +\infty$.

(e) **(10 pts)** Probar que la función

$$g(z) := f(z) - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$$

es holomorfa en $\mathbb{C}$ y acotada, y deducir que $g(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Indicación: Para la holomorfía, puede reducirse (por periodicidad) a analizar $z_0 = 0$. *Para el acotamiento, puede utilizar la periodicidad y analizar el límite de* $|g(z)|$ *cuando* $|\operatorname{Im}(z)| \to +\infty$.

Solución: Para la holomorfía, notamos (e.g. usando series de potencias) que en una vecindad de $z_0 = 0$ se tiene que $\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \frac{1}{z^2} + h(z)$ con $h(z)$ función holomorfa en $z_0 = 0$. Luego, el punto (c) implica que g es holomorfa en $z_0 = 0$ y, por periodicidad, que $g \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ es entera.

Para el acotamiento, escribimos $z = x+iy$ y notamos que $|e^{\pm 2\pi i z}| = e^{\mp 2\pi y}$ implica que $|\sin(\pi z)|^2 \to +\infty$ cuando $|y| \to +\infty$, y luego $|g(z)| \to 0$ cuando $|y| \to +\infty$. Más aún, dado que g es 1-periódica, podemos asumir que $|x| \leq \frac{1}{2}$ y por ende el hecho que $\lim_{|y|\to+\infty} |g(z)| = 0$ implica que existe $R > 0$ tal que $|g(x+iy)| \leq 1$ para todo $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ y todo y tal que $|y| > R$. El Teorema de Weierstrass implica que la función continua g es acotada en el compacto

$$K = \left\{x+iy \in \mathbb{C} \text{ tal que } |x| \leq \frac{1}{2} \text{ y tal que } |y| \leq R\right\}$$

y por ende g es acotada en $\mathbb{C}$. Así, el Teorema de Liouville implica que g es constante y, dado que $\lim_{|y|\to+\infty} |g(z)| = 0$, concluímos que $g(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. En particular,

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} \text{ para todo } z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}.$$

Problema 2 (50 puntos)

El objetivo de este problema es utilizar técnicas de análisis de Fourier para estudiar propiedades *cualitativas* de las soluciones de la Ecuación de Schrödinger.

Más precisamente, en todo lo que sigue consideraremos $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función tal que $f \in S(\mathbb{R})$ y tal que $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = 1$. Más aún, asumiremos en todo el problema que el soporte de la transformada de Fourier de f está contenido en el intervalo $[1, 2]$, i.e.,

$$\widehat{f}(\omega) = 0 \text{ para todo } \omega \notin [1, 2].$$

Supongamos que $u(x, t)$ es una solución de la **Ecuación de Schrödinger** dada por

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = i\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{para todo } x \in \mathbb{R} \text{ y todo } t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & \text{para todo } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

En contexto anterior, buscaremos formalizar matemáticamente el siguiente principio físico:

> La solución $u(x, t)$ de la Ecuación de Schrödinger modela el comportamiento de una partícula en mecánica cuántica. Más precisamente, la integral $\int_a^b |u(x, t)|^2 \, \mathrm{d}x$ nos da la probabilidad de que la partícula pertenezca al intervalo $[a, b]$ en el tiempo t. Así, $|u(x, t)|^2$ se interpreta como la *densidad de probabilidad* de que una partícula esté en la posición x en el tiempo t. La condición sobre el soporte de $\widehat{f}$ se interpreta físicamente diciendo que el *momentum* de la partícula pertenece al intervalo $[1, 2]$. Así, sería de esperar que si una partícula está cercana a $x_0 = 0$ en el tiempo inicial $t_0 = 0$ entonces, dado que el momentum está en el rango $[1, 2]$, debería ser poco probable que dicha partícula esté cerca de $x_0 = 0$ cuando $t \gg 0$ es muy grande.

En términos matemáticos, supondremos en todo lo que sigue que existe una constante positiva $A \in \mathbb{R}^{>0}$ tal que la función f verifica que

$$|f(x)| \leq \frac{A}{(1 + |x|)^3} \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \tag{$\star$}$$

La conclusión física esperada, que demostraremos en lo que sigue, es que

$$|u(0, t)| \leq \frac{B}{t}$$

para cierta constante positiva $B \in \mathbb{R}^{>0}$.

(a) **(10 pts)** Expresar la transformada de Fourier $\widehat{u}(\omega, t)$ en función de $\widehat{f}(\omega)$, y deducir que

$$u(0, t) = \int_1^2 \widehat{f}(\omega) h(\omega, t) \, \mathrm{d}\omega$$

para cierta función $h(\omega, t)$.

Solución: Aplicando transformada de Fourier a la Ecuación de Schrödinger (respecto a la variable x), tenemos que

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} = -4\pi^2\omega^2 i\widehat{u}, \text{ i.e., } \widehat{u}(\omega, t) = A(\omega)e^{-4\pi^2\omega^2 it},$$

donde $A(\omega) = \widehat{u}(\omega, 0) \overset{\text{def}}{=} \widehat{f}(\omega)$. Así, el Teorema de inversión de Fourier (y el hecho que el soporte de $\widehat{f}$ está contenido en $[1, 2]$) implica que

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)e^{-4\pi^2\omega^2 it}e^{2\pi i\omega x} \, \mathrm{d}\omega = \int_1^2 \widehat{f}(\omega)e^{-4\pi^2\omega^2 it}e^{2\pi i\omega x} \, \mathrm{d}\omega.$$

De lo anterior, deducimos que $u(0, t) = \int_1^2 \widehat{f}(\omega)e^{-4\pi^2\omega^2 it} \, \mathrm{d}\omega$.

(b) **(10 pts)** Probar que la hipótesis $(\star)$ implica que $|\widehat{f}(\omega)| \leq A$ y que $|\frac{\mathrm{d}\widehat{f}}{\mathrm{d}\omega}(\omega)| \leq 2\pi A$ para todo $\omega \in \mathbb{R}$.
Indicación: Puede usar directamente el hecho que $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|x|)^3} \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|}{(1+|x|)^3} \, \mathrm{d}x = 1$.

Solución: La hipótesis $(\star)$ implica que $|\widehat{f}(\omega)| \leq A \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|x|)^3} \, \mathrm{d}x = A$. De manera similar, el hecho que $(\widehat{f})'(\omega) = \int_{\mathbb{R}} (-2\pi ix)f(x)e^{-2\pi i\omega x} \, \mathrm{d}x$ implica que $|(\widehat{f})'(\omega)| \leq 2\pi A \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|}{(1+|x|)^3} \, \mathrm{d}x = 2\pi A$.

(c) **(10 pts)** Para todo $u \in [1,4]$ definamos

$$g(u) := \frac{\widehat{f}(\sqrt{u})}{\sqrt{u}}.$$

Probar, usando (a), que $|u(0,t)| \leq \frac{3}{8\pi^2 t} \sup_{u\in[1,4]} |g'(u)|$.

Indicación: Primero expresar $u(0,t)$ en términos de una integral involucrando $g(u)$, e integrar por partes.

Solución: El cambio de variable $u = \omega^2$ nos permite reescribir la integral obtenida en (a) como

$$u(0,t) = \frac{1}{2}\int_1^4 g(u)e^{-4\pi^2 uit}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{g(u)e^{-4\pi^2 uit}}{-8\pi^2 it}\right]_{u=1}^{u=4} + \frac{1}{8\pi^2 it}\int_1^4 g'(u)e^{-4\pi^2 uit}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{8\pi^2 it}\int_1^4 g'(u)e^{-4\pi^2 uit}\,\mathrm{d}u,$$

donde en la integración por partes los términos en $u = 1$ y $u = 4$ se eliminan gracias a que $\widehat{f}(1) = \widehat{f}(2) = 0$. Finalmente, deducimos que

$$|u(0,t)| \leq \frac{1}{8\pi^2 t}(4-1) \sup_{u\in[1,4]} |g'(u)| = \frac{3}{8\pi^2 t} \sup_{u\in[1,4]} |g'(u)| \text{ para todo } t > 0.$$

(d) **(10 pts)** Probar (e.g. usando (b)) que $\sup_{u\in[1,4]} |g'(u)|$ está acotado por una constante que sólo depende de A.

Solución: Para $u \in [1,4]$ calculamos, usando (b), que

$$|g'(u)| \stackrel{\text{def}}{=} \left|\frac{(\widehat{f})'(\sqrt{u})}{2\sqrt{u}} - \frac{\widehat{f}(\sqrt{u})}{2u\sqrt{u}}\right| \leq \frac{1}{2}(|\widehat{f}(\sqrt{u})| + |(\widehat{f})'(\sqrt{u})|) \leq \frac{1}{2}(1+2\pi)A.$$

(e) **(10 pts)** Deducir que existe una constante positiva $B \in \mathbb{R}^{>0}$, que sólo depende de A, tal que

$$|u(0,t)| \leq \frac{B}{t}$$

para todo $t > 0$.

Solución: El punto (c) y el punto (d) implican que

$$|u(0,t)| \leq \frac{3}{8\pi^2 t} \sup_{u\in[1,4]} |g'(u)| \leq \frac{3+6\pi}{16\pi^2 t} A =: \frac{B}{t}$$

para todo $t > 0$, demostrando lo pedido.

Cultura general: El mismo argumento permite probar que si $|f(x)| \leq \frac{A}{(1+|x|)^m}$ entonces $|u(0,t)| \leq \frac{B}{t^{m-2}}$.

Bonus (20 puntos)

El objetivo de este problema es probar el Hecho admitido en el Problema 1, y aplicar el resultado a calcular valores explícitos de la función zeta de Riemann.

(B1) **(10 pts)** Probar el **Hecho** que se asumió sin demostración en el Problema 1.

Solución: Sabemos, como consecuencia del Teorema de factorización de Weierstrass, que el conjunto de polos de una función meromorfa es un conjunto localmente finito (i.e., formado por puntos aislados). Luego, si $P(f) \subseteq \mathbb{C}$ denota el conjunto de polos de una función meromorfa f, entonces $P(f_n) \cap K$ es un conjunto finito para todo $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto y todo $n \in \mathbb{Z}$.

Así, el hecho que $P(f_n) \cap K \neq \emptyset$ sólo para finitos $n \in \mathbb{Z}$, implica que $\cup_{n\in\mathbb{Z}} P(f_n) \cap K$ es un conjunto finito, y en particular $\cup_{n\in\mathbb{Z}} P(f_n)$ es un conjunto de puntos aislados. A posteriori, para todo subconjunto finito $I \subseteq \mathbb{Z}$ se tiene que $P_I := \cup_{n\notin I} P(f_n)$ es un conjunto de puntos aislados.

Finalmente, si $I = I_K$, tenemos por definición de I_K que $\sum_{n\notin I} f_n$ es una serie de funciones holomorfas que converge uniformemente en compactos de $\mathbb{C}\setminus P_I$. Por ende, su límite define una función holomorfa $\sum_{n\notin I} f_n(z)$ en $\mathbb{C} \setminus P_I$ y de esto se deduce que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f = \sum_{n\notin I} f_n + \sum_{n\in I} f_n$ es una función meromorfa en $\mathbb{C} \setminus P_I$. Dado que $\bigcap_{I\subseteq\mathbb{Z} \text{ finito}} P_I \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset$, se tiene que $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n$ define una función meromorfa en todo el plano complejo $\mathbb{C}$.

(B2) **(10 pts)** Deducir, usando el Problema 1, los valores de $\zeta(2)$ y $\zeta(4)$.

Indicación: Notar que localmente cerca de $z_0 = 0$ se tiene que

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \frac{1}{z^2(1+g(z))^2}$$

para cierta $g \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ tal que $g(0) \neq 0$. Recuerde además que $\frac{1}{(1+w)^2} = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}nw^{n-1}$ para $|w| < 1$.

Solución: La expansión en serie de Taylor de la función seno implica que $g(z) = -\frac{\pi^2 z^2}{6} + \frac{\pi^4 z^4}{120} + O(z^5)$. Luego,

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = z^{-2}(1-\tfrac{\pi^2 z^2}{6}+\tfrac{\pi^4 z^4}{120}+O(z^5))^{-2} = z^{-2}(1-2(-\tfrac{\pi^2 z^2}{6}+\tfrac{\pi^4 z^4}{120})+3(-\tfrac{\pi^2 z^2}{6})+O(z^5)) = \tfrac{1}{z^2}+\tfrac{\pi^2}{3}+\tfrac{\pi^4}{15}z^2+O(z^3).$$

Luego, el ítem (c) del Problema 1 implica que $2\zeta(2) = \frac{\pi^2}{3}$ y que $6\zeta(4) = \frac{\pi^4}{15}$. Así, deducimos que

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \text{ y que } \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}.$$

Cultura general: El mismo argumento permite deducir (e.g. por inducción) que $\dfrac{\zeta(2m)}{\pi^{2m}} \in \mathbb{Q}$ para todo $m \geq 1$.