Certamen 1 Análisis Complejo

Profesor: Pedro Montero, Ayudante: Emilio Oyanedel

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

Problema 1 (60 puntos)

El objetivo de este problema es probar una generalización del principio del máximo a *abiertos no-acotados*, bajo ciertas condiciones adecuadas de crecimiento al infinito.

Estrategia: La idea será considerar una función holomorfa definida en cierto abierto *no-acotado* $S \subseteq \mathbb{C}$ y el objetivo será probar que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in S$. La estrategia será introducir cierta función holomorfa h_ε tal que $\lim_{\varepsilon \to 0} h_\varepsilon = 1$ para *amortiguar* el crecimiento de f. Para esto, la función h_ε será escogida de tal suerte que:

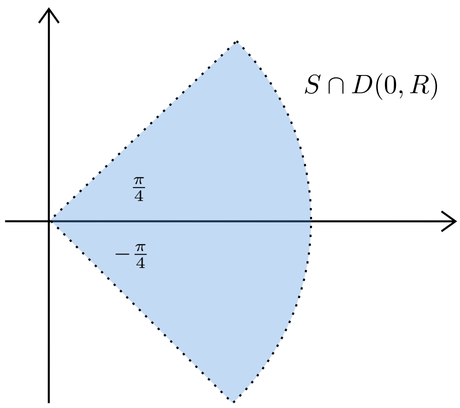
(i) fh_ε sea holomorfa para todo $\varepsilon > 0$ y tal que $|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq M$ para todo $z \in \partial U$, donde $U \subseteq S$ es cierto abierto *acotado*.

(ii) El comportamiento asintótico de fh_ε nos permita establecer que $|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq M$ para todo $z \in S \setminus K$, donde $K = \overline{U}$ es compacto.

Lo anterior nos permitirá utilizar el principio del máximo usual para concluir que $|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq M$ en K y luego extender la conclusión a todo $z \in S$. Finalmente, haciendo tender $\varepsilon \to 0$, de tal suerte que $f(z)h_\varepsilon(z) \to f(z)$ para todo $z \in S$, seremos capaces de concluir que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in S$.

Con la estrategia anterior en mente, consideremos por el resto del problema la región no-acotada dada por

$$S := \left\{ z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^* \text{ tal que } -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4} \right\}$$



y sea $f \in \mathscr{O}(S)$ tal que f es continua en $\overline{S}$, y tal que

$$|f(z)| \leq 1 \text{ para todo } z \in \partial S.$$

(a) **(10 pts)** Probar que la función $f(z) = e^{z^2}$ es holomorfa en S, continua en $\overline{S}$ y además $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in \partial S$. Probar, sin embargo, que existen $z \in \text{int}(S)$ tales que $|f(z)| > 1$.

Solución: La función f es composición de funciones enteras (la exponencial y un polinomio) y por ende $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$. En particular, $f \in \mathscr{O}(S)$ y es continua en $\overline{S}$. Más aún, si $z \in \partial S$ entonces es de la forma $z = re^{\pm i \frac{\pi}{4}}$ con $r \geq 0$ por lo que

$$f(z) = \exp\left(r^2 e^{\pm i\pi/2}\right) \overset{\text{def}}{=} \exp(\pm ir^2)$$

de donde se deduce que $|f(z)| = 1$ para todo $z \in \partial S$. Por otra parte, si $z = x \in \mathbb{R}^{>0}$ entonces $|f(z)| = e^{x^2} \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$.

El ítem anterior nos señala que es necesario imponer una condición de crecimiento al infinito para poder aplicar la estrategia. Más precisamente, en todo lo que sigue supondremos que

$$\text{Existen } A, B \in \mathbb{R}^{>0} \text{ tales que } |f(z)| \leq Ae^{B|z|} \text{ para todo } z \in S. \quad (\star)$$

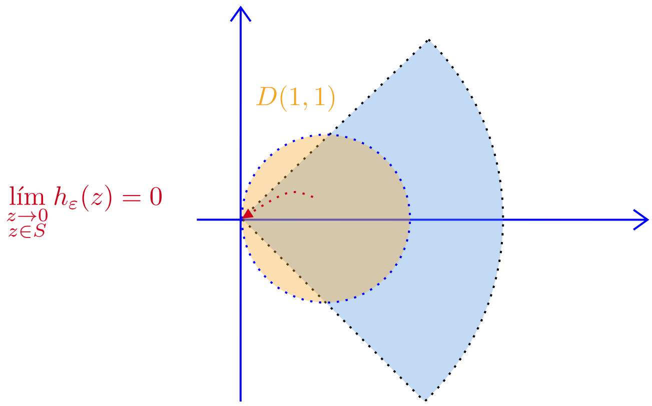
y nuestro objetivo será probar que, bajo la condición $(\star)$, se tiene que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in S$.

(b) **(10 pts)** Para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}^{>0}$, consideremos la función $h_\varepsilon : S \to \mathbb{C}$ definida por

$$h_\varepsilon(z) := e^{-\varepsilon z^{3/2}},$$

donde $z^{3/2} := \exp(\frac{3}{2}\operatorname{Ln}(z))$ está definida utilizando la rama principal del logarítmo complejo. Probar que $h_\varepsilon \in \mathscr{O}(S)$ y que h_ε es continua en $\overline{S}$.
Indicación: La continuidad en $z_0 = 0$ se deduce de la continuidad en $\mathbb{R}^{\geq 0}$ y la fórmula de Newton.

Solución: La rama principal del logarítmo complejo es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{\leq 0}$, donde $(\overline{S} \setminus \{0\}) \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{\leq 0}$. Así, $h_\varepsilon \in \mathscr{O}(S)$ y h_ε es continua en $\overline{S} \setminus \{0\}$. Finalmente, la continuidad en $z_0 = 0 \in \overline{S}$ se deduce de la continuidad de la función *real* $x \mapsto x^{3/2}$ en $\mathbb{R}^{\geq 0}$ y del hecho que $z^{3/2}$ es holomorfa en el disco abierto de radio 1 con centro en $z = 1$ (fórmula de Newton), i.e.,



de donde se deduce la continuidad en $\overline{S}$.

(c) **(10 pts)** Probar que para todo $z \in S$ de la forma $z = re^{i\theta}$ se tiene que

$$|h_\varepsilon(z)| = e^{-\varepsilon r^{3/2}\cos(3\theta/2)}$$

y deducir que $|h_\varepsilon(z)| \leq 1$ para todo $z \in \overline{S}$.

Solución: Dado que $z^{3/2}$ se definió usando la rama principal del logarítmo, se tiene que para $z = re^{i\theta} \in S$ se cumple que $z^{3/2} = r^{3/2}e^{i3\theta/2}$ (pues $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$) y luego

$$h_\varepsilon(z) = e^{-\varepsilon r^{3/2}} e^{e^{i3\theta/2}} \overset{\text{def}}{=} e^{-\varepsilon r^{3/2}\cos(3\theta/2)} e^{i\sin(3\theta/2)}$$

de donde se obtiene que $|h_\varepsilon(z)| = e^{-\varepsilon r^{3/2}\cos(3\theta/2)}$ para todo $z \in S$. Dado que para $-\frac{3\pi}{8} \leq \frac{3\theta}{2} \leq \frac{3\pi}{8}$ se tiene que $0 \leq \cos(\frac{3\theta}{2}) \leq 1$, deducimos que $|h_\varepsilon(z)| \leq e^{-\varepsilon r^{3/2}} \leq 1$ para todo $z \in \overline{S}$.

(d) **(10 pts)** Sea $f_\varepsilon(z) := f(z)h_\varepsilon(z)$. Probar que $|f_\varepsilon(z)| \to 0$ cuando $|z| \to +\infty$, deducir que f_ε es acotada en $\overline{S}$.

Solución: Usando la hipótesis $(\star)$ y los cálculos en el ítem (c), tenemos que

$$|f_\varepsilon(z)| \leq |f(z)|e^{-\varepsilon r^{3/2}} \leq Ae^{-\varepsilon B r^{r/2}}$$

para todo $z = re^{i\theta} \in S$, y luego $|f_\varepsilon(z)| \to 0$ cuando $|z| = r \to +\infty$. De lo anterior deducimos que f_ε es acotada en S, pues para $R \in \mathbb{R}^{>0}$ suficientemente grande se tiene que $|f_\varepsilon(z)| \leq 1$ para todo $z \in \overline{S} \cap \{|z| > R\}$, mientras que en el compacto $\overline{S} \cap \overline{D}(0,R)$ la función f_ε es continua y por lo tanto acotada.

El ítem (d) implica que la cantidad

$$M := \sup_{z \in \overline{S}} |f_\varepsilon(z)|$$

es finita. El resto del problema consistirá en probar que $M \leq 1$, para lo cual <u>asumiremos</u> (sin pérdida de generalidad) que f no es idénticamente nula en S y por ende $M \neq 0$.

(e) **(10 pts)** Considere $\{z_n\}_{n\geq 0} \subseteq \overline{S}$ una sucesión de puntos tales que $\lim_{n\to+\infty} |f_\varepsilon(z_n)| = M$. Probar (e.g. utilizando el ítem (d)) que la sucesión $\{z_n\}_{n\geq 0}$ es **acotada**, i.e., existe $R \in \mathbb{R}^{>0}$ tal que $z_n \in \overline{D}(0,R)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Deducir que $\{z_n\}_{n\geq 0}$ posee un punto de acumulación $z_\infty \in \overline{S}$.

Solución: Si $\{z_n\}_{\geq 0}$ no fuese acotada, habría una sub-sucesión $\{z_{n_k}\}_{k\geq 0}$ tal que $|z_{n_k}| \to +\infty$ cuando $n_k \to +\infty$. Esto último, junto con el ítem (d), implicaría que $M = \lim_{n_k\to+\infty} |f_\varepsilon(z_{n_k})| = 0$, una contradicción con el hecho que $M \neq 0$. Así, $\{z_n\}_{n\geq 0}$ está contenida en el compacto $K := \overline{S} \cap \overline{D}(0,R)$ para cierto $R \in \mathbb{R}^{>0}$, y por ende posee una sub-sucesión convergente $z_{n_k} \xrightarrow{n_k \to +\infty} z_\infty \in K \subseteq \overline{S}$.

(f) **(10 pts)** Probar (e.g. utilizando el principio del máximo) que $z_\infty \notin \mathrm{int}(S)$, i.e., que necesariamente $z_\infty \in \partial S$ y concluir que $|f_\varepsilon(z)| \leq 1$ para todo $z \in \overline{S}$. Finalmente, deducir que

$$|f(z)| \leq 1 \text{ para todo } z \in \overline{S}.$$

Solución: El principio del máximo aplicado al compacto $K = \overline{S} \cap \overline{D}(0, R)$ implica que

$$M \overset{\text{def}}{=} |f_\varepsilon(z_\infty)| \overset{\text{def}}{=} \max_K |f_\varepsilon(z)| = \max_{\partial K} |f_\varepsilon(z)|$$

y por ende $z_\infty \notin \mathrm{int}(K)$, i.e., $z_\infty \in \partial K \overset{\text{def}}{=} \partial S \cup (\partial\overline{D}(0, R) \cap S)$. Dado que

$$|f_\varepsilon(z)| \xrightarrow[z\in S]{|z|\to+\infty} 0,$$

tenemos que (aumentando R si fuera necesario) necesariamente $z_\infty \in \partial S$. El ítem (c) y las hipótesis sobre f implican que $|f_\varepsilon(z)| = |f(z)||h_\varepsilon(z)| \leq 1$ para todo $z \in \partial S$ y por ende (dado que $z_\infty \in \partial S$) se tiene que $\sup_{z\in\overline{S}} |f_\varepsilon(z)| \overset{\text{def}}{=} M \overset{\text{def}}{=} |f(z_\infty)| \leq 1$. Haciendo $\varepsilon \to 0$, tenemos que $f_\varepsilon(z) \to f(z)$ para todo $z \in \overline{S}$ y así $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in \overline{S}$.

Cultura general: La técnica aquí presentada es conocida usualmente como PRINCIPIO DE PHRAGMÉN–LINDELÖF.

Problema 2 (40 puntos)

El objetivo de este problema es utilizar técnicas de análisis complejo para estudiar propiedades de la función Γ de Euler y con ello calcular integrales impropias *reales*. Para ello, consideremos $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a < 1$, y definamos la integral

$$I(a) := \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t}\, \mathrm{d}t$$

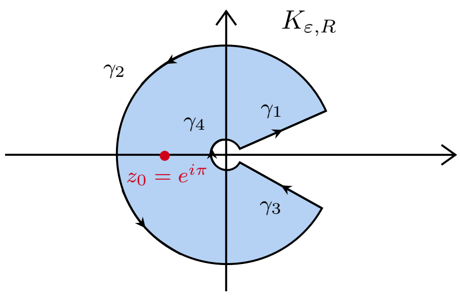
cuya convergencia absoluta admitiremos sin demostración. Para calcular dicha integral, consideremos la función $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) := \frac{z^{a-1}}{z+1},$$

donde $z^{a-1} := \exp((a-1)\log_\pi(z))$ está definida usando la rama del logaritmo definida en $\Omega := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{\geq 0}$. Además, para todos $\varepsilon, R \in \mathbb{R}^{>0}$ tales que $\varepsilon < 1 < R$ considere el compacto dado por

$$K_{\varepsilon,R} := \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^* \text{ tal que } \varepsilon \leq |z| \leq R,\ \varepsilon \leq \theta \leq 2\pi - \varepsilon\}$$

donde el borde $\partial K_{\varepsilon,R}$, de clase $\mathscr{C}^1$ por pedazos, está orientado canónicamente como en la figura siguiente:



Aquí, γ_2 (resp. γ_4) denota el sector circular exterior (resp. interior), y γ_1 y γ_3 son segmentos de recta.

(a) **(10 pts)** Justificar (muy resumidamente) que $f \in \mathscr{O}(\Omega \setminus \{-1\})$ y calcular

$$\int_{\partial K_{\varepsilon,R}} f(z)\, \mathrm{d}z$$

para todos $\varepsilon, R \in \mathbb{R}^{>0}$ tales que $\varepsilon < 1 < R$.

Solución: La rama del logarítmo complejo escogida es holomorfa en Ω y por ende z^{a-1} también, mientras que $1/(z+1)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ por lo que f es holomorfa en $\Omega \setminus \{-1\}$. En particular, $g(z) = z^{a-1}$ es holomorfa en una vecindad abierta de $K_{\varepsilon,R}$ y por ende la fórmula de Cauchy implica que

$$\int_{\partial K_{\varepsilon,R}} f(z)\, \mathrm{d}z = \int_{\partial K_{\varepsilon,R}} \frac{g(z)}{z+1}\, \mathrm{d}z = 2\pi i \cdot g(-1) \overset{\text{def}}{=} 2\pi i \cdot g(e^{i\pi}) = 2\pi i e^{i\pi(a-1)}.$$

En lo que sigue, para todo $j \in \{1,2,3,4\}$, definimos $I_j := \int_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z$.

(b) **(10 pts)** Probar que $I_1 \to I(a)$ y que $I_3 \to -e^{2\pi i(a-1)} I(a)$ cuando $\varepsilon \to 0$ y $R \to +\infty$.
Observación: La convergencia uniforme sobre compactos nos permite tomar límites en el integrando y en los límites de integración (no es necesario dar justificaciones adicionales, tome límites con toda confianza).

Solución: Consideramos la parametrización $\gamma_1(t) = te^{i\varepsilon}$ con $t \in [\varepsilon, R]$ y con ello

$$I_1 = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z \overset{\text{def}}{=} \int_\varepsilon^R \frac{t^{a-1}e^{i\varepsilon(a-1)}}{1+te^{i\varepsilon}} e^{i\varepsilon}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[R\to+\infty]{\varepsilon\to 0} \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}e^0}{1+te^0} e^0\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \overset{\text{def}}{=} I(a).$$

De manera similar, si consideramos la curva con orientación opuesta $\gamma_3^-(t) = te^{i(2\pi-\varepsilon)}$ con $t \in [\varepsilon, R]$ entonces

$$I_3 = -\int_{\gamma_3^-} f(z)\,\mathrm{d}z \overset{\text{def}}{=} -\int_\varepsilon^R \frac{t^{a-1}e^{2\pi i(a-1)}e^{-\varepsilon i(a-1)}}{1+te^{i(2\pi-\varepsilon)}} e^{i(2\pi-\varepsilon)}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[R\to+\infty]{\varepsilon\to 0} -e^{2\pi i(a-1)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}e^0}{1+te^{2\pi i}} e^{2\pi i}\,\mathrm{d}t$$
$$\overset{\text{def}}{=} -e^{2\pi i(a-1)} I(a).$$

donde donde obtenemos lo pedido.

(c) **(10 pts)** Probar que $|I_2| \to 0$ y que $|I_4| \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$ y $R \to +\infty$, y deducir que

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}.$$

Indicación: Para el primer límite se utiliza que $a < 1$, y para el segundo que $a > 0$.

Solución: Consideremos la parametrización $\gamma_2(t) = Re^{it}$ con $t \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, de donde obtenemos que

$$|I_2| \leq \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \frac{R^{a-1}}{R-1} \cdot R\,\mathrm{d}t = (2\pi - 2\varepsilon)\frac{R^a}{R-1} \xrightarrow[R\to+\infty]{\varepsilon\to 0} 0$$

dado que $a < 1$. De manera similar, considerando la parametrización de la curva con orientación opuesta $\gamma_4^-(t) = \varepsilon e^{it}$ con $t \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ se obtiene

$$|I_4| \leq \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \frac{\varepsilon^{a-1}}{1-\varepsilon} \cdot \varepsilon\,\mathrm{d}t = (2\pi - 2\varepsilon)\frac{\varepsilon^a}{1-\varepsilon} \xrightarrow[R\to+\infty]{\varepsilon\to 0} 0$$

puesto que $a > 0$. Finalmente,

$$2\pi i e^{i\pi(a-1)} = \int_{\partial K_{\varepsilon,R}} f(z)\,\mathrm{d}z \overset{\text{def}}{=} I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \xrightarrow[R\to+\infty]{\varepsilon\to 0} (1 - e^{2\pi i(a-1)})I(a)$$

y por lo tanto, usando que $e^{-i\pi} = -1$, se tiene que

$$I(a) = \frac{2\pi i e^{i\pi(a-1)}}{1 - e^{2\pi i(a-1)}} = \pi \frac{2i}{e^{i\pi(a-1)} - e^{i\pi(a-1)}} = \pi \frac{2i}{e^{i\pi a} - e^{-i\pi a}} \overset{\text{def}}{=} \frac{\pi}{\sin(a\pi)}.$$

(d) **(10 pts)** Probar (e.g. usando el principio de extensión analítica) que para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ se verifica que

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)},$$

y utilizar esto para evaluar la integral impropia real

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(\theta)}\,\mathrm{d}\theta.$$

Indicación: Puede usar las propiedades de las funciones Gamma y Beta vistas en clases y ayudantía.

Solución: Las funciones $f_1(z) = \Gamma(z)\Gamma(1-z)$ y $f_2(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ son holomorfas en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Por otro lado, el ítem (c) nos dice que para todo $x \in \mathbb{R}$ con $0 < x < 1$ se tiene que

$$B(x, 1-x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Dado que $\Gamma(1) = 1$, tenemos que $B(x, 1-x) \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma(x)\Gamma(1-x)$ y por ende $f_1(z)$ y $f_2(z)$ coinciden en el sub-conjunto (que **no** es un conjunto de puntos aislados)

$$A := \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \operatorname{Im}(z) = 0,\ 0 < \operatorname{Re}(z) < 1\} \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z},$$

de donde concluímos que $f_1(z) = f_2(z)$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gracias al principio de extensión analítica. Por otra parte, sabemos que

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}(\theta) \sin^{2y-1}(\theta)\, \mathrm{d}\theta,$$

y luego la integral pedida está dada por $\frac{1}{2} B(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin(\pi/4)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, gracias al ítem (c).

Cultura general: La identidad

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \text{ para todo } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$$

es conocida como la Fórmula de Reflexión de Euler, y es una herramienta clave para extender la función zeta de Riemann $\zeta(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}$ a $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Bonus (20 puntos)

El objetivo de este problema es estudiar algunas propiedades útiles de las funciones holomorfas. Recordemos que

$$\mathbb{D} \stackrel{\text{def}}{=} D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z| < 1\}$$

es el disco abierto unitario centrado en el origen.

(B1) **(5 pts)** Probar, utilizando directamente el Problema 1, que si $\theta_0 \in \mathbb{R}$ y

$$S_{\theta_0} = \left\{ z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^* \text{ tal que } \theta_0 < \theta < \theta_0 + \frac{\pi}{2} \right\}$$

entonces toda función $f \in \mathscr{O}(S_{\theta_0})$ tal que f es continua en $\overline{S_{\theta_0}}$, tal que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in \partial S_{\theta_0}$ y tal que existen $A, B \in \mathbb{R}^{>0}$ tales que

$$|f(z)| \leq Ae^{B|z|} \text{ para todos } z \in S_{\theta_0}$$

cumple que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in S_{\theta_0}$.
Indicación: No es necesario re-demostrar el resultado, basta encontrar un biholomorfismo entre S y S_{θ_0}.

Solución: Sea $a := \theta_0 - \frac{\pi}{4} \in \mathbb{R}$. Entonces, $\varphi_a(z) = e^{ia} z$ define un biholomorfismo $\varphi_a : S \xrightarrow{\sim} S_{\theta_0}$ con inversa $\varphi_a^{-1}(z) = e^{-ia} z = \varphi_{-a}(z)$. Así, el resultado para S_{θ_0} se deduce a partir del resultado para S.

(B2) **(5 pts)** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto tal que $\overline{\mathbb{D}} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{D}(0, 1) \subseteq \Omega$, y sea $f \in \mathscr{O}(\Omega)$. Utilizar la integral de línea

$$I = \int_{\partial \mathbb{D}} \left(2 + z + \frac{1}{z}\right) \frac{f(z)}{z}\, \mathrm{d}z$$

para probar que

$$\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2(t/2)\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}(2f(0) + f'(0)).$$

Solución: Por un lado, la fórmula de Cauchy implica que $I = 2\pi i(2f(0) + 0 + f'(0))$. Por otro lado, si parametrizamos $\partial \mathbb{D}$ mediante $\gamma(t) = e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$, tenemos que

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} (2 + e^{it} + e^{-it}) \frac{f(e^{it})}{e^{it}} ie^{it}\, \mathrm{d}t \stackrel{\text{def}}{=} i \int_0^{2\pi} f(e^{it})(e^{it/2} + e^{-it/2})^2\, \mathrm{d}t \stackrel{\text{def}}{=} 4i \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2(t/2)\, \mathrm{d}t,$$

de donde obtenemos el resultado al igualar ambas expresiones.

(B3) **(5 pts)** Sea $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ una función entera no-constante. Probar que $f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$ (i.e., $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$).
Indicación: Si $a \in \mathbb{C}$ no pertenece a la adherencia de $f(\mathbb{C})$, considerar la función $g(z) := \frac{1}{f(z) - a}$.

Solución: Supongamos que $\overline{f(\mathbb{C})} \neq \mathbb{C}$ y sea $a \in \mathbb{C} \setminus \overline{f(\mathbb{C})}$. Definamos

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - a},$$

la cual es una función entera por hipótesis, i.e., $g \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$. Por hipótesis, existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^{>0}$ tal que $|f(z) - a| \geq \varepsilon$ para todo $z \in \mathbb{C}$, i.e., $|g(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon}$ para todo $z \in \mathbb{C}$. El Teorema de Liouville implica que g es constante (al ser entera y acotada) y luego f también, una contradicción.

(B4) **(5 pts)** Sea $f \in \mathscr{O}(\mathbb{D})$. Definimos el **diámetro** de f mediante

$$d := \sup_{z,w\in\mathbb{D}} |f(z) - f(w)|.$$

Probar que para todo $r \in]0,1[$ se tiene que

$$2f'(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,r)} \frac{f(w) - f(-w)}{w^2}\,\mathrm{d}w$$

y deducir que $2|f'(0)| \le d$.

Solución: La fórmula de Cauchy implica que

$$\int_{\partial D(0,r)} \frac{f(w)}{w^2}\,\mathrm{d}w = 2\pi i f'(0).$$

Además, el cambio de variable $z = -w$, con $\mathrm{d}z = -\mathrm{d}w$, implica que

$$\int_{\partial D(0,r)} \frac{f(-w)}{w^2}\,\mathrm{d}w = -\int_{\partial D(0,r)} \frac{f(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z = -2\pi i f'(0),$$

de donde deducimos que $2f'(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,r)} \frac{f(w)-f(-w)}{w^2}\,\mathrm{d}w$ para todo $r \in]0,1[$. Dado que

$$\left|\frac{f(w) - f(-w)}{w^2}\right| \le \frac{d}{r^2},$$

deducimos que $2|f'(0)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d}{r^2} r\,\mathrm{d}t = \frac{d}{r}$, y así que $2|f'(0)| \le d$ al tomar el límite cuando $r \to 1$.