

Pedro MONTERO

con la colaboración de Emilio OYANEDEL

ANÁLISIS COMPLEJO

Pedro MONTERO, con la colaboración de Emilio OYANEDEL

ANÁLISIS COMPLEJO

Pedro MONTERO

con la colaboración de Emilio OYANEDEL

CONTENIDOS

1. Funciones holomorfas e Integración	7
1.1. Preliminares.....	7
1.2. Sucesiones.....	10
1.3. Topología de \mathbb{C}	11
1.4. Funciones continuas.....	16
1.5. Funciones holomorfas.....	18
1.6. Series de potencias.....	21
1.7. Funciones complejas elementales.....	28
1.8. Logaritmo complejo.....	33
1.9. Diferenciabilidad y Ecuaciones de Cauchy-Riemann.....	36
1.10. Operador Laplaciano y funciones armónicas.....	41
1.11. Integración de 1-formas y Teorema de Green.....	43
1.12. Teoremas de Cauchy y Goursat.....	51
1.13. Fórmula de Cauchy y Fórmula de Pompeiu.....	54
1.14. Diferenciabilidad de funciones holomorfas y Teorema de Morera .	57
1.15. Desigualdad de Cauchy y Teorema de Liouville.....	60
1.16. Funciones analíticas.....	62
1.17. Ceros de funciones holomorfas.....	64
1.18. Extensión analítica.....	67
1.19. Teorema de la aplicación abierta.....	68
1.20. Principio del máximo y Lema de Schwarz.....	72
1.21. Espacios de Fréchet y convergencia de funciones holomorfas.....	77
1.22. Derivación bajo el signo integral y Función Γ de Euler.....	81
1.23. Productos infinitos de funciones holomorfas.....	87

2. Funciones meromorfas y Residuos	93
2.1. Series de Laurent.....	93
2.2. Singularidades aisladas y Teorema de Casorati-Weierstrass.....	96
2.3. Funciones meromorfas y Teorema de factorización de Weierstrass .	99
2.4. Teorema de Residuos.....	105
2.5. Cálculo de integrales reales mediante residuos.....	109
3. Introducción al Análisis de Fourier	119
3.1. Transformada de Fourier y la clase \mathcal{F}	119
3.2. Transformada inversa de Fourier y Fórmula de Poisson.....	122
3.3. Teorema de Phragmén-Lindelöf y Teorema de Paley-Wiener.....	127
3.4. Espacio de Schwartz y Aplicaciones a EDP.....	128

CAPÍTULO 1

FUNCIONES HOLOMORFAS E INTEGRACIÓN

Luego de recordar las propiedades básicas de los números complejos, exploraremos las nociones de diferenciabilidad e integración en el sentido complejo.

1.1. Preliminares

De manera formal, los números complejos se definen como el anillo cociente

$$\mathbb{C} := \mathbb{R}[X]/\langle X^2 + 1 \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{[a + bX] \text{ con } a, b \in \mathbb{R} \text{ y } [X^2] = [-1]\}.$$

y donde se adopta la notación $i := [X]$. En particular, $i^2 = -1$ en \mathbb{C} .

¡Atención! — En la práctica, los números complejos se consideran como elementos del conjunto

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy \text{ con } x, y \in \mathbb{R} \text{ y con } i^2 = -1\}.$$

Hay una correspondencia biyectiva

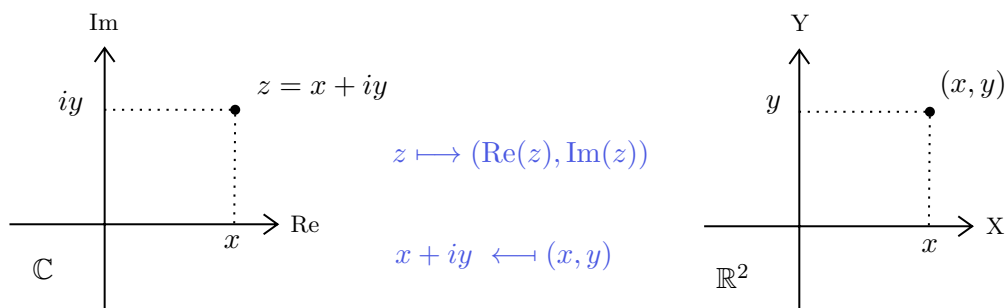


IMAGEN 1. El plano complejo.

Aquí, el número real $x := \operatorname{Re}(z)$ (resp. $y := \operatorname{Im}(z)$) es la **parte real** (resp. **parte imaginaria**) del número complejo z .

Cabe destacar que la estructura de *anillo*⁽¹⁾ se hereda del conjunto de polinomios $\mathbb{R}[X]$. Más precisamente, para $z = x + iy$ y $w = s + it$ dos números complejos, se define la suma

$$z + w := (x + s) + i(y + t)$$

y se define la multiplicación

$$z \cdot w := (x + iy)(s + it) = xs + ixt + iys + i^2yt = (xs - yt) + i(xt + ys).$$

Observación 1.1.1. — Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$ un número complejo.

(1) Si $z = x + iy \neq 0$ (i.e., $x \neq 0$ o $y \neq 0$) entonces

$$z^{-1} := \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) + i \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

cumple $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$. Luego, \mathbb{C} es un **cuerpo** (e.g. $i^{-1} = -i$).

(2) Si definimos el **conjugado** de z mediante $\bar{z} := x - iy$, entonces:

$$z\bar{z} = x^2 + y^2, \quad \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

(3) El cuerpo \mathbb{C} hereda de \mathbb{R}^2 la estructura de **espacio vectorial normado**. Más precisamente, definimos la cantidad

$$|z| := \|(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))\|_{\text{eucl}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

que es llamada el **módulo** de z . En particular, tenemos que

$$|z|^2 = z\bar{z} \quad \text{y} \quad z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad \text{para todo } z \neq 0.$$

(4) Para todos $z, w \in \mathbb{C}$ tenemos que:

$$(i) \quad |zw| = |z||w|, \quad |\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \quad \text{y} \quad |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|.$$

$$(ii) \quad |z + w| \leq |z| + |w| \quad \text{y} \quad ||z| - |w|| \leq |z - w|.$$

Tradicionalmente, estás dos últimas desigualdades se conocen como la **desigualdad triangular**.

⁽¹⁾En términos prácticos, un conjunto dotado de una suma y multiplicación, que verifican las propiedades usuales. Ver MAT214 (Estructuras Algebraicas) para más detalles.

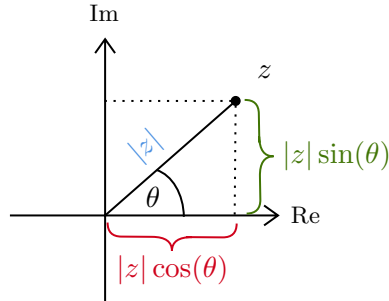


IMAGEN 2. Forma polar de un complejo no-nulo.

Recuerdo 1.1.2 (Forma polar). — El conjunto de complejos no-nulos será denotado $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Consideremos $z \in \mathbb{C}^*$ fijo. Un **argumento** de z , denotado $\arg(z)$, es un número real $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z) = |z| \cos(\theta) \\ \operatorname{Im}(z) = |z| \sin(\theta) \end{cases}$$

¡Atención! — Debido a la periodicidad de las funciones trigonométricas, el número real $\arg(z)$ está bien definido módulo múltiplos enteros de 2π (i.e., $\arg(z) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$). Por definición, tenemos que

$$z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z) \stackrel{\text{def}}{=} |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)).$$

Esta escritura es llamada la **forma polar** del número complejo $z \in \mathbb{C}^*$.

Proposición 1.1.3 (Identidad de Euler). — Sea $\theta \in \mathbb{R}$ un número real. Entonces,

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Demostración. — La función real a valores complejos $f(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ verifica que

$$f'(\theta) = -\sin(\theta) + i\cos(\theta) = i(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = if(\theta), \text{ es decir, } f' = if.$$

Además, cumple la condición inicial $f(0) = 1$. Luego, $f(\theta) = e^{i\theta}$. \square

Lo anterior, motiva la siguiente definición.

Definición 1.1.4. — Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Definimos la **exponencial** de z mediante

$$e^z := e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)).$$

El siguiente ejercicio resume algunas de las propiedades más útiles de la exponencial compleja.

Ejercicio 1.1.5. — Sean $z, w \in \mathbb{C}$ y sea $\theta \in \mathbb{R}$.

- (1) Probar que $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$.
- (2) Probar la **identidad de de Moivre**, es decir, que

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

- (3) Probar que $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ y que $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

1.2. Sucesiones

Recordemos la noción de convergencia en los números complejos.

Definición 1.2.1. — Sea $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en \mathbb{C} . Diremos que $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** a $w \in \mathbb{C}$ si $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n - w| = 0$, y en tal caso escribimos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = w.$$

Observación importante 1.2.2. — Dado que la noción de módulo $|\cdot|$ proviene de la norma usual $\|\cdot\|_{\text{eucl}}$ de \mathbb{R}^2 , se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = w \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(w) \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im}(w)$$

La desventaja de la definición de convergencia es que requiere conocer *a priori* el candidato a límite. La forma de remediar lo anterior, es considerar la siguiente noción alternativa.

Definición 1.2.3. — Sea $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en \mathbb{C} . Diremos que $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una **sucesión de Cauchy** si

Para todo $\varepsilon > 0$, existe cierto $N \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n - z_m| < \varepsilon$ para todos $n, m \geq N$.

Una consecuencia importante de la construcción de los números reales \mathbb{R} usando sucesiones de Cauchy de números racionales es el siguiente resultado (que admitiremos sin demostración):

Teorema 1.2.4. — *El espacio vectorial normado $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\text{eucl}})$ es **completo**, es decir, toda sucesión de Cauchy converge.*

Dado que la noción de distancia en \mathbb{C} proviene de \mathbb{R}^2 , se deduce que:

Corolario 1.2.5. — El espacio vectorial normado $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ es completo.

En términos prácticos, el resultado anterior nos dice que basta verificar que una sucesión de números complejos es de Cauchy para asegurar la convergencia, sin necesidad de conocer a priori el límite al cual converge.

1.3. Topología de \mathbb{C}

Recordemos algunas nociones básicas de espacios métricos.

Definición 1.3.1. — Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y sea $r \in \mathbb{R}^{>0}$. Definimos

- (1) El **disco abierto** de radio r centrado en z_0 por

$$D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z - z_0| < r\}.$$

- (2) El **disco cerrado** de radio r centrado en z_0 por

$$\bar{D}(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z - z_0| \leq r\}.$$

- (3) El **círculo** de radio r centrado en z_0 por

$$\Gamma(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z - z_0| = r\}.$$

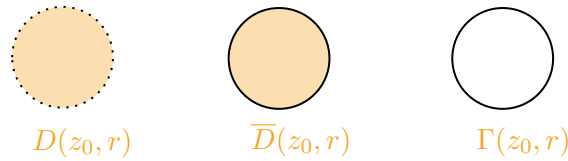


IMAGEN 3. Discos abiertos y cerrados, y su borde.

Notación 1.3.2. — Típicamente, el disco abierto de radio 1 y centro en $z_0 = 0$ es llamado el **disco unitario**. Explícitamente, se define

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z| < 1\}.$$

Además de lo anterior, necesitaremos las siguientes nociones de topología.

Definición 1.3.3. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un subconjunto, y sea $z \in \mathbb{C}$. Decimos que:

- (1) z es un **punto interior** de Ω si existe $r > 0$ tal que $D(z, r) \subseteq \Omega$.

Denotamos por $\text{int}(\Omega)$ o por Ω° al conjunto de puntos interiores de Ω , i.e., al conjunto $\{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } z \text{ es un punto interior de } \Omega\}$.

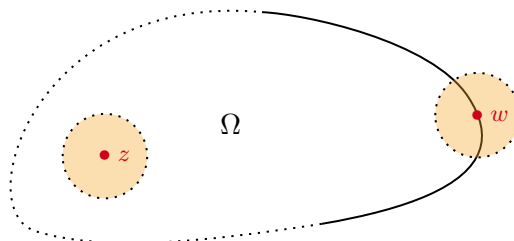


IMAGEN 4. $z \in \text{int}(\Omega)$, pero $w \notin \text{int}(\Omega)$

(2) Ω es **abierto** si $\text{int}(\Omega) = \Omega$.

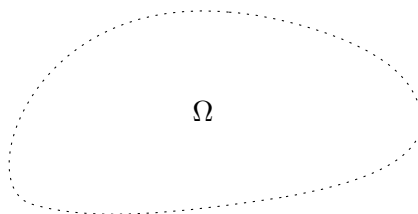


IMAGEN 5. Conjunto abierto

(3) Ω es **cerrado** si su complemento $\Omega^c \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C} \setminus \Omega$ es abierto.

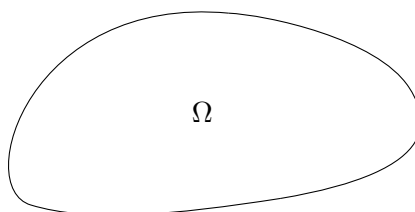
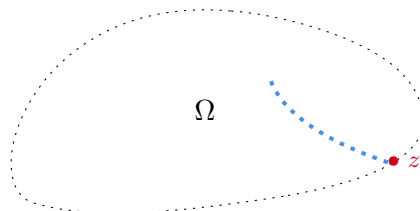


IMAGEN 6. Conjunto cerrado.

(4) z es un **punto límite** o **punto de acumulación** de Ω si existe $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega$ sucesión tal que $z_n \neq z$ para todo n y tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z$.

IMAGEN 7. Un punto de acumulación que no pertenece a Ω .

Denotamos por

$$\Omega' := \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } z \text{ es punto de acumulación de } \Omega\}$$

al conjunto de puntos de acumulación de Ω . Es un hecho clásico de topología⁽²⁾ que Ω es cerrado si y sólo si $\Omega' \subseteq \Omega$.

(5) La **clausura** o **adherencia** de Ω es el conjunto $\bar{\Omega} := \Omega \cup \Omega'$.

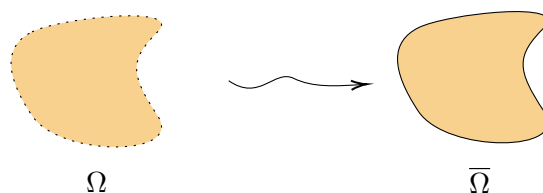


IMAGEN 8. La adherencia de un conjunto.

(6) La **frontera** o **borde** de Ω es el conjunto $\partial\Omega := \bar{\Omega} \setminus \text{int}(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\Omega} \cap \bar{\Omega}^c$.

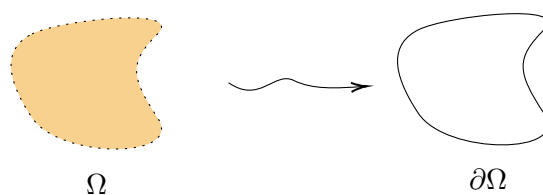


IMAGEN 9. El borde de un conjunto.

⁽²⁾Es un buen ejercicio.

(7) Ω es **acotado** si existe $M \in \mathbb{R}^{>0}$ tal que $\Omega \subseteq D(0, M)$.

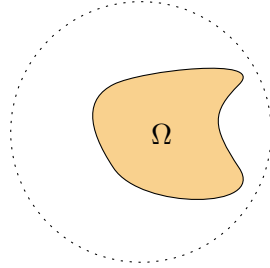


IMAGEN 10. Un conjunto acotado.

En tal caso, definimos el **diámetro** de Ω por

$$\text{diam}(\Omega) := \sup_{z, w \in \Omega} |z - w|.$$

(8) Ω es **compacto** si es cerrado y acotado.

Dado que $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ es isométrico a $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\text{eucl}})$, se tiene la siguiente caracterización de compactidad en términos de sucesiones (que asumiremos sin demostración).

Teorema 1.3.4 (Bolzano-Weierstrass). — *Un subconjunto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es compacto si y sólo si toda sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega$ posee una subsucesión convergente a un punto en Ω .*

Recordemos además la siguiente noción fundamental en topología.

Definición 1.3.5. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Un **cubrimiento abierto** de Ω es una familia $\{U_i\}_{i \in I}$ de abiertos de \mathbb{C} tales que

$$\Omega \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i.$$

En el caso que el conjunto de índices I sea finito, decimos que $\{U_i\}_{i \in I}$ es un **cubrimiento finito** de Ω .

Con la definición anterior en mente, se tiene la siguiente caracterización topológica de compacidad (que asumiremos sin demostración).

Teorema 1.3.6 (Heine-Borel). — *Un subconjunto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es compacto si y sólo si todo cubrimiento abierto de Ω admite un subcubrimiento finito.*

El siguiente resultado será de utilidad más adelante.

Proposición 1.3.7. — Consideremos una colección

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \cdots \supseteq K_n \supseteq \cdots$$

de conjuntos compactos no-vacíos de \mathbb{C} tales que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{diam}(K_n) = 0$. Entonces, existe un único $w \in \mathbb{C}$ tal que $w \in K_n$ para todo $n \geq 1$.

Demostración. — Elegimos un elemento $z_n \in K_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Notar que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{diam}(K_n) = 0$ implica que $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy. Como \mathbb{C} es completo, existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = w$. Veamos que dicho w verifica lo deseado:

Dado que K_n es compacto y $\{z_m\}_{m \geq n} \subseteq K_n$ es una sucesión convergente, $w \in K_n$ para todo n . Finalmente, si elegimos otra sucesión $\{z'_n\}_{n \geq 1}$ con $z'_n \in K_n$ y tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} z'_n = w' \neq w$, se tendría que $|w - w'| > 0$. Esto último es una contradicción con el hecho que $\text{diam}(K_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. \square

Para finalizar, recordemos la importante propiedad topológica siguiente.

Definición 1.3.8. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto (resp. conjunto cerrado). Decimos que Ω es **conexo** si no es posible hallar dos conjuntos abiertos (resp. conjuntos cerrados) no-vacíos y disjuntos Ω_1 y Ω_2 tales que

$$\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2.$$

Aquí, $\Omega_1 \sqcup \Omega_2$ denota la unión disjunta de Ω_1 y Ω_2 .

Terminología 1.3.9. — En muchos textos, es común decir que una **región** de \mathbb{C} es un abierto conexo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ no-vacío.

Una caracterización importante de los conjuntos conexos del plano complejo es la siguiente (que asumiremos sin demostración).

Teorema 1.3.10. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Entonces, Ω es conexo si y sólo si todo par de puntos en Ω puede conectarse mediante una curva Γ completamente contenida en Ω .

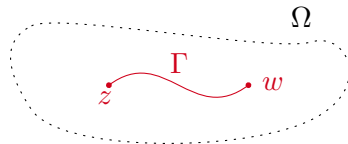


IMAGEN 11. Conjunto conexo.

¡Atención! — Pronto definiremos formalmente lo que entendemos por “curva”.

1.4. Funciones continuas

La noción de continuidad para funciones de variable compleja es completamente análoga a aquellas estudiadas para funciones de una o varias variables reales.

Definición 1.4.1. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función. Decimos que f es **continua** en el punto $z_0 \in \Omega$ si

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $z \in \Omega$ y $|z - z_0| < \delta$, entonces $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

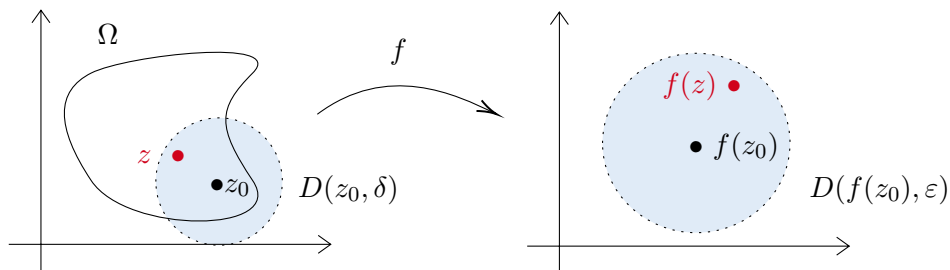


IMAGEN 12. Función continua.

Esto es equivalente a su vez a que

Para toda sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z_0$, se tiene que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(z_n) = f(z_0)$.

Decimos que f es **continua en Ω** si es continua en cada punto $z_0 \in \Omega$.

El siguiente ejercicio muestra que para que una función de variable compleja sea continua, basta verificar que su parte real e imaginaria sean continuas.

Ejercicio 1.4.2. — Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función, y escribamos $z = x + iy$. Si escribimos $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ e identificamos f con la función real $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$, probar que

f es continua en $z_0 = x_0 + iy_0 \iff u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas en (x_0, y_0) .

Las siguientes propiedades se prueban exactamente de la misma forma en el caso de funciones de variable real.

Proposición 1.4.3. — Sean $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ funciones continuas en $z_0 \in \Omega$. Entonces:

- (1) Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, la función λf es continua en z_0 .
- (2) La función suma $f + g$ es continua en z_0 .
- (3) La función producto fg es continua en z_0 .
- (4) Si $g(z_0) \neq 0$, entonces la función cociente f/g es continua en z_0 .

En particular, el conjunto de funciones continuas en Ω

$$\mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{C}) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ función continua}\}$$

es una \mathbb{C} -álgebra⁽³⁾.

Ejercicio 1.4.4. — Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Probar que la función

$$|f| : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto |f(z)|$$

es continua.

Indicación: Utilizar la desigualdad triangular.

La ventaja de analizar $|f|$ en lugar de f , es que $|f|$ toma valores reales y por ende tiene sentido hablar de mínimos y máximos.

Definición 1.4.5. — Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función. Decimos que f alcanza un:

- (1) **máximo** en $z_0 \in \Omega$ si

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \text{ para todo } z \in \Omega.$$

- (2) **mínimo** en $z_0 \in \Omega$ si

$$|f(z_0)| \leq |f(z)| \text{ para todo } z \in \Omega.$$

Un resultado fundamental de análisis real (que asumiremos sin demostración) es el siguiente.

Teorema 1.4.6 (Weierstrass). — Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto compacto, y sea $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Entonces,

La función $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ alcanza un máximo y un mínimo en K .

En particular, la función $|f|$ es acotada en K .

⁽³⁾Es decir, un \mathbb{C} -espacio vectorial que además es un anillo conmutativo.

1.5. Funciones holomorfas

Luego de los preámbulos anteriores, estamos en condiciones de comenzar el estudio de funciones de variable compleja. Comencemos por definir la noción de derivabilidad.

Definición 1.5.1. — Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función y sea $z_0 \in \Omega'$ un punto de acumulación de Ω . Diremos que f es **derivable** (en sentido complejo) en $z_0 \in \Omega$ si el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \Omega}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. En tal caso, denotamos su valor por $f'(z_0) \in \mathbb{C}$.

Observación importante 1.5.2. —

- (1) Aquí, $h \in \mathbb{C}^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $z_0 + h \in \Omega$. Es importante notar que h se acerca a $0 \in \mathbb{C}$ en **cualquier dirección**.
- (2) Como consecuencia del álgebra de límites, si f y g son derivables en z_0 entonces se tiene que:
 - (i) Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, la función λf es derivable en z_0 y además $(\lambda f)'(z_0) = \lambda f'(z_0)$.
 - (ii) La función suma $f+g$ es derivable en z_0 y además $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$.
 - (iii) La función producto fg es derivable en z_0 y además se cumple la **regla de Leibniz**

$$(fg)'(z_0) = f(z_0)g'(z_0) + f'(z_0)g(z_0).$$

- (iv) Si $g(z_0) \neq 0$, la función cociente f/g es derivable en z_0 y además

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{g(z_0)f'(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

- (3) Si f es derivable en z_0 , entonces f es continua en z_0 . En efecto, se tiene

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) - f(z_0)] = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{(f(z) - f(z_0))}{z - z_0} \cdot (z - z_0) \right] = f'(z_0) \cdot 0 = 0.$$

- (4) Si f derivable en z_0 y si g es derivable en $f(z_0)$ entonces la composición $(g \circ f)$ es derivable en z_0 y además se cumple la **regla de la cadena**

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

Veamos algunos ejemplos importantes.

Ejemplo 1.5.3. —

- (1) Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, y sea $f(z) = \lambda$ función constante. Entonces, para todo $z_0 \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda - \lambda}{h} = 0.$$

En otras palabras, $f'(z_0) = 0$ para todo $z_0 \in \mathbb{C}$.

- (2) Sea $f(z) = z$ y sea $z_0 \in \mathbb{C}$. Entonces, se tiene que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z_0 + h - z_0}{h} = 1.$$

En otras palabras, $f'(z_0) = 1$ para todo $z_0 \in \mathbb{C}$.

- (3) El Ejemplo (2) junto con la Observación 1.5.2 (2.iii) implican que $f(z) = z^n$ es derivable para todo $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Más aún, se prueba mediante inducción que

$$f'(z_0) = nz_0^{n-1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}^{\geq 1} \text{ y para todo } z_0 \in \mathbb{C}.$$

Aquí, definimos $0^0 := 1$ por conveniencia.

- (4) El Ejemplo (3) junto con la Observación 1.5.2 (2.i) y (2.ii) implican que *todo* polinomio

$$p(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n \in \mathbb{C}[z]$$

es derivable para todo $z_0 \in \mathbb{C}$. Aquí, $\mathbb{C}[z]$ denota el anillo de polinomios con coeficientes en \mathbb{C} en la variable z .

- (5) Consideremos la función racional

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n}{b_0 + b_1z + \cdots + b_mz^m} \in \mathbb{C}(z),$$

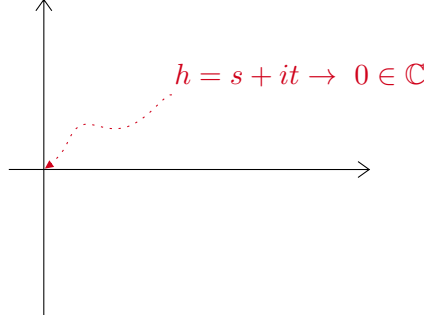
donde $\mathbb{C}(z)$ denota el cuerpo de funciones racionales. Si consideramos el abierto de \mathbb{C} dado por

$$U_q := \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } q(z) \neq 0\},$$

entonces el Ejemplo (4) y la Observación 1.5.2 (2.iv) implican que f es derivable en $U_q \subseteq \mathbb{C}$.

- (6) Sea $f(z) = \bar{z}$ y sea $z_0 \in \mathbb{C}$. Entonces,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{z_0 + h} - \bar{z}_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h}$$

IMAGEN 13. $h \in \mathbb{C}$ tiende a $0 \in \mathbb{C}$.

Si el número complejo $h = s + it \in \mathbb{C}$ verifica:

- (i) $s = 0$, entonces $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-it}{it} = -1$.
- (ii) $t = 0$, entonces $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s}{s} = 1$.

Luego, $f(z) = \bar{z}$ **no** es derivable en ningún punto del plano complejo \mathbb{C} . Es importante destacar que, por otra parte, la función real asociada

$$F(x, y) = (x, -y)$$

es diferenciable en \mathbb{R}^2 .

(7) Sea $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$ y sea $z_0 \in \mathbb{C}$. Entonces, tenemos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z_0 + h)(\bar{z}_0 + \bar{h}) - z_0\bar{z}_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\bar{z}_0 + \bar{h} + z_0 \frac{\bar{h}}{h} \right).$$

Luego, $f'(z_0)$ existe si y sólo si $z_0 = 0$. Más aún, tenemos que $f'(0) = 0$.

Por lejos, la definición más importante del Análisis Complejo es la siguiente.

Definición 1.5.4 (Función holomorfa). — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no-vacío. Una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ se dirá **holomorfa** en el punto $z_0 \in \Omega$ si

Existe $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subseteq \Omega$ y tal que f es derivable en todo punto del disco abierto $D(z_0, r)$.

En particular, diremos que f es **holomorfa en Ω** si es holomorfa en todo punto $z_0 \in \Omega$. Más generalmente, si $A \subseteq \mathbb{C}$ es un conjunto no necesariamente abierto, entonces decimos que f es holomorfa en A si existe un abierto Ω tal que $A \subseteq \Omega \subseteq \text{Dom}(f)$ y tal que f es holomorfa en Ω .

La siguiente notación estará presente en todo el resto del texto.

Notación 1.5.5. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un subconjunto. Denotamos por

$$\mathcal{O}(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ función holomorfa en } \Omega\}$$

al \mathbb{C} -álgebra de funciones holomorfas en Ω . Más aún, una función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en *todo* el plano complejo \mathbb{C} (es decir, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$) es llamada una **función entera**.

Ejemplo 1.5.6. —

- (1) La función $f(z) = |z|^2$ es derivable en $z_0 = 0$, pero **no es** holomorfa en $z_0 = 0$.
- (2) Todo polinomio $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ es una función entera.
- (3) La función racional $f(z) = p(z)/q(z) \in \mathbb{C}(z)$ es holomorfa en el abierto $\Omega := U_q \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } q(z) \neq 0\} \subseteq \mathbb{C}$.

1.6. Series de potencias

En esta sección, discutiremos sobre una clase importante de funciones holomorfas. Comencemos por recordar un poco de notación y terminología.

Recuerdo 1.6.1. — Si $\{u_n\}_{n \geq n_0}$ es una sucesión en el cuerpo $k = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} , de término general u_n , entonces denotamos por $\sum_{n \geq n_0} u_n$ (o simplemente $\sum u_n$) a la sucesión $\{s_n\}_{n \geq n_0}$ de *sumas parciales*

$$s_n := u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_n \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Decimos que la serie $\sum_{n \geq n_0} u_n$ es **convergente** si $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ existe. En tal caso, escribimos

$$S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$$

y decimos que $S \in \mathbb{C}$ es la **suma** de la serie $\sum_{n \geq n_0} u_n$. El **resto de orden n** de una serie convergente $\sum u_n$ de suma S es

$$\rho_n := S - s_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$$

En muchos casos, trabajaremos con series que convergen más fuertemente. La siguiente definición permite precisar esto.

Definición 1.6.2. — Sea $k = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} y $\Omega \subseteq k$ no-vacío. Consideremos una sucesión $\{f_n : \Omega \rightarrow k, x \mapsto f_n(x)\}_{n \geq n_0}$ de funciones a valores en k y definamos para cada función $f : \Omega \rightarrow k$ la norma del supremo

$$\|f\|_{\Omega} := \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$$

Entonces, decimos que la serie de funciones $\sum f_n$:

- (1) **Converge uniformemente en Ω** si la serie $\sum f_n(x)$ converge para todo $x \in \Omega$ (i.e., converge puntualmente en Ω) y los restos verifican

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\rho_n\|_{\Omega} = 0.$$

- (2) **Converge normalmente en Ω** si la serie real $\sum \|f_n\|_{\Omega}$ converge.

Observación 1.6.3. — Se tienen las siguientes relaciones entre las diferentes nociones de convergencia.

- (1) La convergencia normal implica la convergencia uniforme.
 (2) La convergencia normal implica la **convergencia absoluta uniforme** (i.e., $\sum |f_n|$ converge uniforme), pero no coinciden:

Ejercicio 1.6.4. — Analizar la convergencia normal y (absoluta) uniforme de $\sum f_n$ donde $f_n(x) = 0$ si $x \neq n$ y $f_n(n) = 1/n$.

Un resultado clásico de análisis real, que asumiremos sin demostración, es el siguiente criterio de convergencia.

Proposición 1.6.5 (M-test de Weierstrass). — Sea $k = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} y $\Omega \subseteq k$ no-vacío, y sea $\{f_n : \Omega \rightarrow k, x \mapsto f_n(x)\}_{n \geq n_0}$ una sucesión de funciones a valores en k . Supongamos que

$$|f_n(x)| \leq M_n \text{ para todo } x \in \Omega \text{ y la serie } \sum M_n \text{ converge en } \mathbb{R}.$$

Entonces $\sum f_n$ converge absoluto uniforme en Ω .

Estamos en condiciones de dar la definición principal de esta sección.

Definición 1.6.6. — Una **serie de potencias** compleja es una serie de funciones de la forma

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

donde $a_n \in \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}$ es una variable compleja. El **dominio de convergencia** de la serie de potencias está dado por

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \sum a_n z^n \text{ converge}\}$$

Si $z \in \mathcal{D}$, escribimos $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ el valor de la suma en z .

Teorema 1.6.7. — Sea $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ una serie de potencias compleja, y sea $R \in \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ dado por

$$R := \sup\{r \geq 0 \text{ tal que la sucesión } \{|a_n| r^n\}_{n \geq 0} \text{ es acotada}\}.$$

Entonces, el dominio de convergencia \mathcal{D} verifica

$$D(0, R) \subseteq \mathcal{D} \subseteq \overline{D}(0, R),$$

y la serie $\sum a_n z^n$ converge normalmente en todo disco cerrado $\overline{D}(0, r) \subseteq D(0, R)$. Además, el **radio de convergencia** R está dado por

$$R = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad (\text{fórmula de Hadamard})$$

Finalmente, si $a_n \neq 0$ para todo n y $\ell := \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_{n+1}|/|a_n|$ existe en $\mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ entonces $R = 1/\ell$ (criterio de d'Alembert).

Demostración. — Consideremos

$$A := \{r \geq 0 \text{ tal que } \{|a_n| r^n\}_{n \geq 0} \text{ es acotada}\} \subseteq \mathbb{R}^{\geq 0}$$

y sea $R := \sup A$. Luego, si $|z| > R$ entonces $|z| \notin A$ y por ende $\{|a_n||z|^n\}_{n \geq 0}$ es no acotada, por lo que $\sum a_n z^n$ diverge. Así, $\mathcal{D} \subseteq \overline{D}(0, R)$.

Sea $r \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ tal que $r < R = \sup A$, entonces existe $\rho \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ tal que $\rho \in A$ y $r < \rho < R$. Por definición de A , existe $C \geq 0$ tal que $|a_n| \rho^n \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y luego para $z \in \overline{D}(0, r)$ tenemos

$$|a_n z^n| = |a_n| \rho^n \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n \leq C \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$$

con $r/\rho < 1$. Luego, por desigualdad triangular

$$\left| \sum a_n z^n \right| \leq \sum |a_n z^n| \leq \sum \|a_n z^n\|_{\overline{D}(0, r)} \leq C \sum \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$$

Como esta última serie es convergente, $\sum a_n z^n$ converge normalmente en $\overline{D}(0, r)$ para todo $r < R$. Así, $D(0, R) \subseteq \mathcal{D}$.

Para probar la fórmula de Hadamard, notamos que si $r > \liminf 1/\sqrt[n]{|a_n|}$ entonces hay infinitos índices n tales que⁽⁴⁾

$$\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \leq r_0$$

⁽⁴⁾Recordar que si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ es una sucesión de números reales, el **límite inferior** $\liminf x_n$ es el menor de los puntos de acumulación, i.e., $\liminf x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{m \geq n} x_m \right)$.

para cierto $0 < r_0 < r$. Entonces $|a_n|r_0^n \geq 1$, y así la subsucesión

$$|a_n|r^n \geq \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \rightarrow \infty$$

no es acotada. Luego, por definición de radio de convergencia, se tiene $R \leq r$. Recíprocamente, si $r < \liminf 1/\sqrt[n]{|a_n|}$, entonces

$$\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \geq r$$

para $n \geq n_0$ suficientemente grande, luego $|a_n|r^n \leq 1$ para todo $n \geq n_0$ y por tanto $|a_n|r^n$ es acotada. Luego, por definición de radio de convergencia, tenemos que $R \geq r$ y así $R = \liminf 1/\sqrt[n]{|a_n|}$. Finalmente, el criterio de d'Alambert se deduce a partir del hecho que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell \text{ implica que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell,$$

lo cual se deja como ejercicio. \square

¡Atención! — En la fórmula de Hadamard, consideramos $1/0 := +\infty$.

Ejemplo 1.6.8. —

- (1) La **serie geométrica** $\sum_{n \geq 0} z^n$ tiene radio de convergencia $R = 1$ y dominio de convergencia $\mathcal{D} = D(0, 1)$.
- (2) La serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^n}$$

tiene radio de convergencia $R = +\infty$ y $\mathcal{D} = \mathbb{C}$.

- (3) La serie $\sum_{n \geq 1} n^n z^n$ tiene radio de convergencia $R = 0$ y $\mathcal{D} = \{0\}$.
- (4) Dado que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1,$$

las series $\sum a_n z^n$ y $\sum n^\alpha a_n z^n$ tienen el mismo radio de convergencia. Sin embargo, reemplazar a_n por $n^\alpha a_n$ puede afectar la convergencia en el borde $\partial D(0, R)$:

Por ejemplo, para la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} z^n$ se tiene que $\mathcal{D} = \overline{D}(0, 1)$, mientras que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} z^n$ diverge en $z = 1 \in \partial D(0, 1)$.

Más precisamente, el siguiente resultado de Abel permitirá probar que la serie dada por $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} z^n$ converge en $\mathcal{D} = \overline{D}(0, 1) \setminus \{0\}$.

Proposición 1.6.9 (Lema de Abel). —

Sea $\sum_{n \geq n_0} u_n v_n$ una serie compleja. Supongamos que $u_n \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ para todo $n \geq n_0$ y que $\{u_n\}_{n \geq n_0}$ es una sucesión decreciente que converge a 0. Además, supongamos que las sumas parciales

$$s_n = v_{n_0} + v_{n_0+1} + \cdots + v_n$$

cumplen $|s_n| \leq M$ para todo $n \geq n_0$, para cierta constante $M \in \mathbb{R}^{\geq 0}$. Entonces, la serie $\sum u_n v_n$ es convergente.

Demostración. — Veamos que

$$\left\{ \sum_{n=n_0}^p u_n v_n \right\}_{p \geq n_0}$$

es una sucesión de Cauchy, y por lo tanto es convergente. En efecto, para todos $q > p > n_0$ escribimos

$$\begin{aligned} u_p v_p + \cdots + u_q v_q &= u_p (s_p - s_{p-1}) + u_{p+1} (s_{p+1} - s_p) + \cdots + u_q (s_q - s_{q-1}) \\ &= -u_p s_{p-1} + s_p \underbrace{(u_p - u_{p+1})}_{\geq 0} + \cdots + s_{q-1} \underbrace{(u_{q-1} - u_q)}_{\geq 0} + u_q s_q. \end{aligned}$$

Dado que $|s_n| \leq M$, entonces

$$\begin{aligned} |u_p v_p + \cdots + u_q v_q| &\leq M u_p + M(u_p - u_{p+1}) + \cdots + M(u_{q-1} - u_q) + M u_q \\ &= 2M u_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

de donde se concluye la convergencia. \square

Ejemplo 1.6.10. — Sea $z = e^{i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R}$ y tal que $z \neq 1$. Consideremos la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} z^n$ donde $u_n := 1/n \searrow 0$ y $v_n := z^n = e^{ni\theta}$. Dado que

$$v_1 + \cdots + v_n = e^{i\theta} \left(\frac{e^{ni\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \right)$$

tenemos que

$$|v_1 + \cdots + v_n| \leq M := \frac{2}{|e^{i\theta} - 1|}.$$

Así, el Lema de Abel implica la convergencia de $\sum \frac{1}{n} z^n$ si $|z| = 1$ y $z \neq 1$.

Observación 1.6.11. — Podemos sumar y multiplicar series:

Sean $\sum a_n z^n$ y $\sum b_n z^n$ series de potencias con radios de convergencia R' y R'' respectivamente. Entonces, podemos considerar:

- (1) La **suma** $\sum a_n z^n + \sum b_n z^n := \sum (a_n + b_n) z^n$, que ciertamente converge en $D(0, R') \cap D(0, R'')$ y luego, su radio de convergencia R^+ verifica

$$R^+ \geq \min\{R', R''\}$$

Más aún, $R^+ = \min\{R', R''\}$ si $R' \neq R''$ pues en tal caso la serie diverge para $R' < |z| < R''$.

Ejercicio 1.6.12. — Dar un ejemplo donde $R^+ > \min\{R', R''\}$.

- (2) El **producto** $(\sum a_n z^n)(\sum b_n z^n)$. Para ello, recordemos que si $\sum_{p \geq 0} u_p$ y $\sum_{q \geq 0} v_q$ son series absolutamente convergentes, entonces

$$\left(\sum u_p\right)\left(\sum v_q\right) = \sum_{n \geq 0} w_n$$

donde

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{p=0}^n u_p v_{n-p} = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0$$

En el caso particular de series de potencias, considerando $u_n := a_n z^n$ y $v_n = b_n z^n$, la fórmula anterior nos da el **producto de Cauchy**

$$\left(\sum a_n z^n\right)\left(\sum b_n z^n\right) = \sum c_n z^n$$

donde

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{p=0}^n a_p b_{n-p} \quad \forall n \geq 0$$

La serie producto converge en $D(0, R') \cap D(0, R'')$ pues cada factor converge absolutamente en dicho conjunto. Así, su radio de convergencia R^\times verifica

$$R^\times \geq \min\{R', R''\}$$

Ejercicio 1.6.13. — Considere las series $\sum_{n \geq 0} a_n z^n = 1 + \sum_{n \geq 1} 2^{n-1} z^n$ y $\sum_{n \geq 0} b_n z^n = 1 - \sum_{n \geq 1} z^n$. Pruebe que es posible que $R^\times > \min\{R', R''\}$ incluso cuando $R' \neq R''$.

El siguiente importante resultado nos dará muchos ejemplos de funciones holomorfas. Mejor aún, más adelante veremos que *toda* función holomorfa es de esta forma.

Teorema 1.6.14. — Sea $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$. Entonces, la derivada $f'(z)$ existe para todo $z \in D(0, R)$ (i.e. $f \in \mathcal{O}(D(0, R))$). Más aún,

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1},$$

y en particular

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-p+1) a_n z^{n-p} \text{ para todo } p \geq 1.$$

Además, estas series de potencias tienen el mismo radio de convergencia $R > 0$.

Demostración. — El hecho que las series derivadas tengan el mismo radio de convergencia viene del hecho que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n(n-1) \cdots (n-p+1)} = 1$ para todo $p \in \mathbb{N}$, y de la fórmula de Hadamard. Por otra parte,

$$(z+h)^n = z^n + n h z^{n-1} + \sum_{p=2}^n \binom{n}{p} h^p z^{n-p},$$

gracias a la fórmula del binomio de Newton, con

$$\binom{n}{p} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n(n-1)}{p(p-1)} \binom{n-2}{p-2} \leq n(n-1) \binom{n-2}{p-2}.$$

Así,

$$\left| \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} \right| \leq n(n-1) |h| \sum_{p=2}^n \binom{n}{p} |h|^{p-2} |z|^{n-p} = n(n-1) |h| (|h| + |z|)^{n-2}.$$

Sea $z \in D(0, R)$ y $h \in \mathbb{C}^*$ tal que $z+h \in D(0, R)$. El cálculo anterior nos da

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1} \right| \leq |h| \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) |a_n| (|z| + |h|)^{n-2}.$$

Considerar $\delta > 0$ tal que $|h| \leq \delta < R - |z|$, i.e., $|z| + |h| \leq r := |z| + \delta < R$, luego el hecho que $r < R$ implica que

$$\sum_{n \geq 2} n(n-1) |a_n| (|z| + |h|)^{n-2} \leq M := \sum_{n \geq 2} n(n-1) |a_n| r^{n-2} < +\infty.$$

Finalmente, concluimos al considerar $h \rightarrow 0$ que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1} \quad \text{para todo } z \in D(0, R),$$

de donde obtenemos la fórmula deseada. \square

Observación 1.6.15. — Recíprocamente, dada una serie de potencias $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ con radio de convergencia $R > 0$, entonces f posee una **primitiva compleja** en el disco abierto $D(0, R)$ dada por

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} = \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$$

de tal suerte que $F'(z) = f(z)$. Más aún

- (1) El radio de convergencia de F es $R > 0$ también.
- (2) Cualquier otra primitiva de f es de la forma $F + C$ para cierta $C \in \mathbb{C}$ constante.

Cultura general 1.6.16. —

En general, no es fácil determinar el comportamiento de una serie de potencias en puntos en el borde $z_0 \in \partial D(0, R) = \Gamma(0, R)$. La serie puede no ser continua en z_0 o incluso no ser acotada. Sin embargo, se tiene el siguiente resultado parcial.

Teorema 1.6.17 (Abel). — Sea $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$ finito, y sea $z_0 \in \Gamma(0, R)$ tal que $f(z_0)$ converge. Entonces, si $S = S_{z_0, \delta, \eta} \subseteq D(0, R) \cup \{z_0\}$ es un sector circular cerrado de la forma

$$S_{z_0, \delta, \eta} := \left\{ z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z - z_0| \leq \delta \text{ y } |\angle(z - z_0, z_0)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta \right\}$$

entonces $\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in S \cap D(0, R)}} f(z) = f(z_0)$.

En otras palabras, podemos asegurar continuidad en $z_0 \in \Gamma(0, R) \cap \mathcal{D}$ siempre y cuando **no** nos acercamos “tangencialmente” a z_0 .

1.7. Funciones complejas elementales

Recordemos algunas funciones notables que pueden definirse mediante series de potencias. Comencemos por la **función exponencial** compleja, que puede definirse a partir de la exponencial real y las funciones trigonométricas reales (suponiendo que hayan sido definidas con rigurosidad anteriormente, c.f. §1.1). También es posible (y conveniente) hacerlo al revés.

Definición 1.7.1. — Para todo $z \in \mathbb{C}$ definimos la **función exponencial** mediante la serie de potencias

$$e^z = \exp(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

cuyo radio de convergencia es $+\infty$. En particular, la exponencial $e^z \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ es una función entera.

La propiedad más importante de e^z es la siguiente.

Proposición 1.7.2 (Propiedad fundamental). — La función exponencial \exp define un morfismo entre el grupo aditivo $(\mathbb{C}, +)$ y el grupo multiplicativo (\mathbb{C}^*, \times) . En otras palabras, para todos $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w$$

Demostración. — Tenemos que $e^z e^w = (\sum u_p)(\sum v_q)$ con $u_p := \frac{z^p}{p!}$ y $v_q := \frac{w^q}{q!}$. Así, la serie producto está dada por el producto de Cauchy $\sum w_n$ con

$$w_n = \sum_{p=0}^n \frac{z^p}{p!} \cdot \frac{w^{n-p}}{(n-p)!} = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} z^p w^{n-p} = \frac{(z+w)^n}{n!}$$

y luego $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$. En particular, $e^z \cdot e^{-z} = e^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$ y así $e^z \in \mathbb{C}^*$. \square

¡Atención! — Más adelante veremos que e^z es sobreyectiva.

A partir de la exponencial podemos definir las siguientes funciones clásicas.

Definición 1.7.3. — Para $z \in \mathbb{C}$, definimos

(1) La función **coseno hiperbólico** mediante

$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

(2) La función **seno hiperbólico** mediante

$$\sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(3) La función **coseno** mediante

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cosh(iz) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

(4) La función **seno** mediante

$$\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{\sinh(iz)}{i} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Ejemplo importante 1.7.4. —

- (1) Todas estas series tienen radio de convergencia $R = +\infty$, y luego son funciones enteras.
- (2) Dado que todas las series están definidas mediante coeficientes $a_n \in \mathbb{R}$, ellas toman valores reales al restringirlas al eje real de \mathbb{C} . Más aún, ellas cumplen $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
- (3) La propiedad fundamental de \exp implica todas las identidades trigonométricas usuales. Por ejemplo,

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad \text{para todos } a, b \in \mathbb{C}$$

- (4) Usando las definiciones anteriores, se puede extender la identidad de Euler a todo el plano complejo. Más precisamente

Ejercicio 1.7.5. — Probar que

$$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z) \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}$$

- (5) En particular, si $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tenemos que

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$$

Luego, la identidad $1 = e^{iy} e^{-iy}$ implica

$$1 = (\cos(y) + i \sin(y))(\cos(y) - i \sin(y)) = \cos^2(y) + \sin^2(y).$$

Así, $\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 1.7.6. — Probar que $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Como acabamos de ilustrar en los ejemplos anteriores, las propiedades de la exponencial compleja permiten *probar* propiedades de las funciones trigonométricas reales. En particular, el siguiente resultado nos permite definir rigurosamente $\pi \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.7.7. —

- (1) La función exponencial real induce un isomorfismo de grupos

$$(\mathbb{R}, +) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^{>0}, \times), \quad x \mapsto e^x$$

- (2) La función $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se anula en un real positivo minimal que será denotado $\pi/2$.

(3) La función exponencial compleja es periódica de periodo $2\pi i$ e induce morfismos de grupos sobreyectivos

$$(\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{S}^1, \times), y \mapsto e^{iy}$$

$$(\mathbb{C}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times), z \mapsto e^{iz}$$

donde $e^{iy} = 1$ (resp. $e^z = 1$) si y solo si $y \in 2\pi\mathbb{Z}$ (resp. $2\pi i\mathbb{Z}$). Aquí, $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z| = 1\} \stackrel{\text{def}}{=} \partial\mathbb{D}$ es el círculo unitario en \mathbb{C} .

Demostración. — Para (1) basta probar que \exp es una biyección continua y creciente entre \mathbb{R} y $\mathbb{R}^{>0}$. Notar que $e^x = 1 + x + \sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n!} \geq 1 + x > 0$ para $x \geq 0$, luego $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. Por otro lado, $e^x = 1/e^{-x}$ implica que $e^x > 0$ para $x \leq 0$ y que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Finalmente, el hecho que $(e^x)' \stackrel{\text{def}}{=} e^x > 0$ implica que e^x es estrictamente creciente en \mathbb{R} .

Para (2), supongamos por contradicción que \cos no se anula en $[0, +\infty[$. Como $\cos(0) \stackrel{\text{def}}{=} 1$, el Teorema del Valor Intermedio implica que $\cos(x) > 0$ en $[0, +\infty[$. Dado que $(\sin(x))' \stackrel{\text{def}}{=} \cos(x)$, tendríamos que $\sin(x)$ sería estrictamente creciente y positiva en $]0, +\infty[$. Por otro lado, dado que $(\cos(x))' \stackrel{\text{def}}{=} -\sin(x)$, el Teorema del Valor Medio nos daría que para todo $x > 1$, existe $c \in [1, x]$ tal que

$$\frac{\cos(x) - \cos(1)}{x - 1} = -\sin(c) \leq -\sin(1)$$

i.e., $\cos(x) \leq \cos(1) - (x - 1)\sin(1)$ para todo $x \geq 1$, y luego $\cos(x) < 0$ si $x \gg 0$, lo que es una contradicción. Así, como $[0, +\infty[\cap \cos^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$ es cerrado no-vacío, existe un único $x_0 := \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}^{>0}$ minimal tal que $\cos(\pi/2) = 0$.

Para probar (3), notamos que $\cos(x) > 0$ para $x \in [0, \pi/2[$. Además, la relación $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ implica que $\sin(\pi/2) = \pm 1$. Por otra parte, dado que $\cos(x) = (\sin(x))'$ tenemos que $y \mapsto \sin(y)$ es una biyección creciente entre el intervalo $[0, \pi/2]$ y $[0, 1]$ (pues $\sin(0) \stackrel{\text{def}}{=} 0$), y luego $\sin(\pi/2) = 1$. Entonces, la función $[0, \pi/2] \ni y \mapsto e^{iy}$ parametriza biyectivamente el cuarto de circunferencia

$$\sqrt{\cos^2(y) + \sin^2(y)} = |z| = 1, \quad \operatorname{Re}(z) \geq 0, \quad \operatorname{Im}(z) \geq 0.$$

La identidad de Euler y la propiedad fundamental de \exp implican que

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = i, \quad e^{(y+\frac{\pi}{2})i} = ie^{iy}, \quad e^{2\pi i} = 1,$$

de donde concluimos que $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1, y \mapsto e^{iy}$ es sobreyectiva, y que $e^{iy} = 1$ si y solo si $y \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Finalmente, el último resultado sobre $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$, $z \mapsto e^z$ se deduce del hecho que todo complejo $z \neq 0$ admite una forma polar $z = \rho u$, donde $\rho = |z| \in \mathbb{R}^{>0}$ y donde $u = z/|z| \in \mathbb{S}^1$. \square

Ejercicio 1.7.8. — Probar que

- (1) Las funciones **tangente** y **secante**, definidas respectivamente como

$$\tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)}, \quad \sec(z) := \frac{1}{\cos(z)}$$

son holomorfas en $\Omega = \mathbb{C} \setminus (\pi/2 + \pi\mathbb{Z})$.

- (2) Las funciones **cotangente** y **cosecante**, definidas respectivamente como

$$\cot(z) := \frac{\cos(z)}{\sin(z)}, \quad \csc(z) := \frac{1}{\sin(z)}$$

son holomorfas en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

- (3) La función **tangente hiperbólica**

$$\tanh(z) := \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}$$

es holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus (i\pi/2 + i\pi\mathbb{Z})$.

- (4) La función **cotangente hiperbólica**

$$\coth(z) := \frac{\cosh(z)}{\sinh(z)}$$

es holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus i\pi\mathbb{Z}$.

- (5) Probar que las funciones $\cos(z)$ y $\sin(z)$ **no** son acotadas en \mathbb{C} .

Recuerdo 1.7.9. — Terminemos esta sección recordando que:

- (1) La función **logaritmo natural** (real) es por definición un isomorfismo de grupos $\ln : (\mathbb{R}^{>0}, \times) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$ dado por la inversa de la exponencial. En particular, para todos $x, y \in \mathbb{R}^{>0}$ se tiene que

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

- (2) Si $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, con $\rho = |z| > 0$, entonces $\theta = \arg(z) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Así, para $z = x + iy \in \mathbb{C}$ la relación $e^z = e^x(\cos(y) + i \sin(y))$ implica que:

$$|e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re}(z)} \quad \text{y} \quad \arg(e^z) = y = \operatorname{Im}(z) \pmod{2\pi\mathbb{Z}}.$$

El siguiente acotamiento es bastante útil en la práctica.

Ejercicio 1.7.10. — Probar que para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$|e^z| \leq e^{|z|}, \text{ y además } |e^{iz}| = e^{-\operatorname{Im}(z)}.$$

1.8. Logaritmo complejo

Notemos que si $w \in \mathbb{C}^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C} \setminus \{0\}$, la ecuación $e^z = w$ implica

$$|w| = \exp(\operatorname{Re}(z)) \quad \text{y} \quad \arg(w) = \operatorname{Im}(z) \pmod{2\pi\mathbb{Z}}$$

Así, dado $w \in \mathbb{C}^*$, podemos resolver $e^z = w$ al considerar:

$$\operatorname{Re}(z) = \ln |w| \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(z) = \arg(w) \pmod{2\pi\mathbb{Z}},$$

i.e., $z = \ln |w| + i \arg(w) \pmod{2\pi i\mathbb{Z}}$.

Para evitar esta ambigüedad de **elegir** un argumento $\arg(w)$ procedemos de la siguiente manera:

Construcción 1.8.1. — Sea $\theta_0 \in \mathbb{R}$ fijo y consideremos el abierto

$$\Omega_{\theta_0} := \{z \in \mathbb{C}^* \text{ tal que } \arg(z) \neq \theta_0 + \pi \pmod{2\pi\mathbb{Z}}\},$$

i.e., $\Omega_{\theta_0} = \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}^{\leq 0} e^{i\theta_0})$ dado que $e^{i\pi} = -1$.

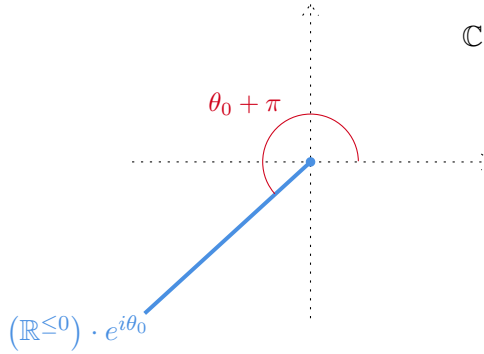


IMAGEN 14. La región Ω_{θ_0} .

Para $z \in \Omega_{\theta_0}$ definimos la **rama del argumento** $\arg_{\theta_0}(z)$ como el único ángulo $\theta \in]\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi[$ tal que $\arg(z) = \theta \pmod{2\pi\mathbb{Z}}$.

De manera similar, definimos la **rama del logaritmo complejo** \log_{θ_0} por

$$\log_{\theta_0}(z) := \ln |z| + i \arg_{\theta_0}(z), \quad \text{para todo } z \in \Omega_{\theta_0}.$$

¡Atención! — Las funciones \arg_{θ_0} y \log_{θ_0} **no** se pueden extender de manera continua a \mathbb{C}^* . En efecto, en un punto de $\mathbb{R}^{>0} e^{i\theta_0}$ los límites de \arg_{θ_0} y \log_{θ_0} en cada lado de la semi-recta defieren en 2π (respectivamente $2\pi i$).

Definición 1.8.2. — La **rama principal del argumento** está dada por

$$\operatorname{Arg}(z) := \arg_0(z) \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^{<0}.$$

Del mismo modo, la **rama principal del logaritmo** está dada por:

$$\operatorname{Ln}(z) := \ln |z| + i\operatorname{Arg}(z) \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^{<0}.$$

Aquí, $\operatorname{Arg}(z) \in] - \pi, \pi[$.

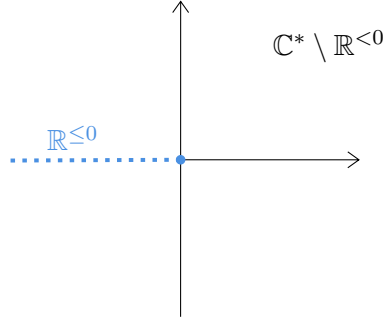


IMAGEN 15. Los números complejos sin el semi-eje real negativo.

Ejemplo 1.8.3. — Con la notación anterior, $\operatorname{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$ y luego $\operatorname{Ln}(i) = i\frac{\pi}{2}$.

Veamos que **todas** las ramas del logaritmo complejo son holomorfas:

Proposición 1.8.4. — Para todo $\theta_0 \in \mathbb{R}$, la función \log_{θ_0} verifica

$$\exp \circ \log_{\theta_0} = \operatorname{Id} \text{ en } \Omega_{\theta_0}.$$

Más aún, para todo $z \in \Omega_{\theta_0}$ se tiene que

$$(\log_{\theta_0})'(z) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{\xi \rightarrow z \\ \xi \in \Omega_{\theta_0}}} \frac{\log_{\theta_0}(\xi) - \log_{\theta_0}(z)}{\xi - z} = \frac{1}{z}$$

Demostración. — La identidad $\exp \circ \log_{\theta_0} = \operatorname{Id}$ se obtiene por construcción de la función \log_{θ_0} . Para calcular su derivada, definamos $w := \log_{\theta_0}(z)$ y $\eta = \log_{\theta_0}(\xi)$. Si $\xi \rightarrow z$, entonces $\eta \rightarrow w$ por continuidad de \log_{θ_0} , así

$$\frac{\log_{\theta_0}(\xi) - \log_{\theta_0}(z)}{\xi - z} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\eta - w}{e^\eta - e^w} = \left(\frac{e^\eta - e^w}{\eta - w} \right)^{-1} \longrightarrow \frac{1}{\exp'(w)} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}$$

de donde obtenemos el resultado. \square

Ejemplo importante 1.8.5. —

Sea $f(z) := \text{Ln}(1+z)$, definida en $\Omega = \mathbb{C} \setminus]-\infty, -1]$, entonces

$$f'(z) = \frac{1}{1+z} \quad \text{para todo } z \in \Omega.$$

En particular

$$f'(z) = \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots + (-1)^n z^n + \dots$$

en $D(0, 1)$. Como $\text{Ln}(1) \stackrel{\text{def}}{=} 0$, tenemos que

$$f(z) = \text{Ln}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \dots$$

en $D(0, 1)$. Por otro lado, sabemos que $\sum \frac{1}{n} z^n$ converge en $\overline{D}(0, 1) \setminus \{1\}$ y luego $f(z) = (\sum \frac{1}{n} (-z)^n) - 1$ converge en $\overline{D}(0, 1) \setminus \{1\}$. Por ejemplo,

$$\text{Ln}(2) = \ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$$

Observación 1.8.6. — Como consecuencia, el logaritmo complejo nos permite definir la función z^α para cualquier $\alpha \in \mathbb{C}$, teniendo en cuenta que se debe elegir una rama:

$$z^\alpha := \exp(\alpha \log_{\theta_0}(z)) \quad \text{para todo } z \in \Omega_{\theta_0}$$

En particular, calculamos

$$\frac{d}{dz}(z^\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} (\exp)'(\alpha \log_{\theta_0}(z)) \frac{\alpha}{z} = \alpha z^{\alpha-1} \quad \text{para todo } z \in \Omega_{\theta_0}$$

Es importante destacar que el valor de z^α depende de la rama escogida.

Ejercicio 1.8.7. — Probar que:

- (1) $i^i = e^{-\pi/2}$ si escogemos la rama principal Ln del logaritmo.
- (2) $i^i = e^{-5\pi/2}$ si escogemos la rama $\log_{2\pi}$.

Lema 1.8.8 (Fórmula de Newton). — La rama principal

$$(1+z)^\alpha := \exp(\alpha \text{Ln}(1+z)),$$

definida en $\mathbb{C} \setminus]-\infty, -1]$ está dada por la serie de potencias

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} z^n + \dots$$

en el disco abierto $D(0, 1)$.

Demostración. — Sea

$$f(z) := 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \dots$$

Luego, los coeficientes a_n de la serie de potencias anterior verifican que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha-n}{n+1} \rightarrow -1 \text{ cuando } n \rightarrow +\infty,$$

y luego $R = 1$. Por otro lado, tenemos que $f'(z) = \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ con

$$n a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+2)}{(n-1)!} (\alpha-n+1) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha a_{n-1} - (n-1) a_{n-1}.$$

Es decir, la derivada $f'(z) = \alpha f(z) - z f'(z)$ verifica la ecuación diferencial

$$(1+z)f'(z) = \alpha f(z).$$

Luego, la función $g(z) = f(z)/(1+z)^\alpha$ verifica

$$g'(z) = \frac{f'(z)(1+z)^\alpha - f(z)\alpha(1+z)^{\alpha-1}}{(1+z)^{2\alpha}} = 0 \quad \text{para todo } z \in D(0,1).$$

Así, concluimos que $g(z) = g(0) \stackrel{\text{def}}{=} 1$ para todo $z \in D(0,1)$, i.e., $f(z) = (1+z)^\alpha$ para todo $z \in D(0,1)$. \square

Aplicación. Las series de potencias de $(1+z^2)^{-1}$ y $(1-z^2)^{-1/2}$ nos dan, al integrar, las series de potencias:

$$(1) \operatorname{Arctan}(z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad \text{para todo } z \in \overline{D}(0,1) \setminus \{\pm i\}.$$

$$(2) \operatorname{Arcsin}(z) = z + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{para todo } z \in \overline{D}(0,1).$$

Ejercicio 1.8.9. — Probar que para todo $z \in \overline{D}(0,1) \setminus \{\pm i\}$

$$\operatorname{Arctan}(z) = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right)$$

1.9. Diferenciabilidad y Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre $k = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} .

Definición 1.9.1. — Sea $\Omega \subseteq V$ abierto no-vacío y $f : \Omega \rightarrow W$ una función. Decimos que f es **k -diferenciable** en $x \in \Omega$ si existe $\ell \in \operatorname{Hom}_k(V, W)$ aplicación k -lineal y existe $\varepsilon : U \rightarrow W$ función definida en una vecindad $U \subseteq V$ de $0 \in V$ tales que

$$f(x+h) = f(x) + \ell(h) + \|h\|\varepsilon(h), \quad \text{para todo } h \in U$$

con $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ en W .

En caso de existir, la aplicación lineal ℓ es *única* y es llamada la **diferencial de f** en x , denotada por $df_x := \ell$. Por convención, una función \mathbb{R} -diferenciable se dirá diferenciable simplemente.

Notación 1.9.2 (Landau). — Sea $h \mapsto \eta(h)$ una función arbitraria entre espacios vectoriales normados, entonces:

$$(1) \quad \eta(h) = O(\|h\|^m) \stackrel{\text{def}}{\iff} \text{Existe } C > 0 \text{ tal que } \|\eta(h)\| \leq C\|h\|^m.$$

$$(2) \quad \eta(h) = o(\|h\|^m) \stackrel{\text{def}}{\iff} \text{Existe } \varepsilon \text{ tal que } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \text{ y } \|\eta(h)\| \leq \varepsilon(h)\|h\|^m$$

Así, si $f : \Omega \rightarrow W$ es k -diferenciable en $x \in \Omega$ entonces

$$f(x+h) = f(x) + df_x(h) + o(\|h\|).$$

Notación 1.9.3. — Si $f : \Omega \rightarrow W$ es k -diferenciable para todo $x \in \Omega$, escribimos

$$df : \Omega \rightarrow \text{Hom}_k(V, W), x \mapsto df_x$$

la **diferencial de f** .

Observación importante 1.9.4. — Si $V \cong k^n$ y (e_1, \dots, e_n) es una base de V , entonces podemos escribir $h = \sum_{j=1}^n h_j e_j \in V$ y luego $\ell \in \text{Hom}_k(V, W)$ verifica $\ell = \sum_{j=1}^n h_j v_j$ con $v_j := \ell(e_j) \in W$. En particular, se tiene

$$df_x(h) = \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x), \quad \forall h = \sum_{j=1}^n h_j e_j$$

donde

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) := df_x(e_j) \in W$$

es la **derivada parcial** de f en la dirección e_j .

Ejemplo importante 1.9.5. — Si $f : V \rightarrow W$ es una aplicación lineal, entonces $df_x = f$ para todo $x \in V$, i.e., $df = f$ es una función *constante* (!). En particular, las funciones coordenadas (respecto a la base (e_1, \dots, e_n))

$$x_j : V \rightarrow k, \quad \sum_{j=1}^n a_j e_j \mapsto a_j$$

verifican $dx_j = x_j$ y luego $dx_j(h) = h_j$.

Así, para toda $\ell \in \text{Hom}_k(V, W)$, la identidad $\ell(h) = \sum_{j=1}^n h_j \ell(e_j)$ equivale a la siguiente igualdad entre aplicaciones lineales⁽⁵⁾

$$\ell = \sum_{j=1}^n dx_j \cdot \ell(e_j),$$

donde (dx_1, \dots, dx_n) es una base del espacio dual $\text{Hom}_k(V, k) = V^*$. Luego

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

Veamos el caso de funciones de variable compleja:

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z)$ una función. Si consideramos la identificación $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, $z = x + iy \mapsto (x, y)$ y si f es \mathbb{R} -diferenciable, entonces:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

¡Atención! — En \mathbb{C} es más natural considerar las coordenadas $(z = x + iy, \bar{z} = x - iy)$, en lugar de las variables coordenadas reales (x, y) . En particular,

$$\begin{cases} dz = dx + idy \\ d\bar{z} = dx - idy \end{cases} \iff \begin{cases} dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) \\ dy = -\frac{i}{2}(dz - d\bar{z}) \end{cases}$$

Así, (dx, dy) y $(dz, d\bar{z})$ son dos bases de $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ y luego

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

se reescribe como

$$df = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\bar{z}.$$

Definición 1.9.6. — Escribamos $z = x + iy \in \Omega \subseteq \mathbb{C}$ y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función \mathbb{R} -diferenciable en Ω . Definimos

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

llamadas **derivadas de Wirtinger**. Así,

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

⁽⁵⁾En términos de álgebra multi-lineal, la igualdad se traduce en un isomorfismo de k -espacios vectoriales $\text{Hom}_k(V, W) \cong V^* \otimes W$.

Además, los operadores diferenciales $\frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ son \mathbb{C} -lineales y son conocidos como **derivada holomorfa** y **derivada anti-holomorfa**, respectivamente.

Ejercicio 1.9.7. — Probar que los operadores $\frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ son conjugados, es decir,

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \quad \text{y} \quad \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}$$

Ahora podemos enunciar el resultado principal de esta sección.

Teorema 1.9.8. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no-vacío y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función. Entonces, son equivalentes:

- (1) f es holomorfa en Ω (i.e., $f \in \mathcal{O}(\Omega)$).
- (2) f es \mathbb{R} -diferenciable en Ω y $df_z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es \mathbb{C} -lineal para todo $z \in \Omega$.
- (3) f es \mathbb{R} -diferenciable en Ω y se verifica la **ecuación de Cauchy Riemann**

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Más aún, si cualquiera de estas condiciones se cumple, entonces $\frac{\partial f}{\partial z} = f'$.

Demostración. — Primero veamos que (1) implica (2). Si $f'(z)$ existe en todo $z \in \Omega$, entonces existe una función $\varepsilon : U \rightarrow \mathbb{C}$ definida en una vecindad U de $0 \in \mathbb{C}$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z) + \varepsilon(h) \quad \text{para todo } h \in U,$$

es decir, $f(z+h) = f(z) + f'(z)h + h\varepsilon(h)$, entonces $df_z(h) = f'(z)h$ y luego observamos que df_z es \mathbb{C} -lineal.

Para ver que (2) implica (3) notamos que

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

implica que $df_z(h) = \frac{\partial f}{\partial z} h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \bar{h}$, y luego

$$df_z(ih) = i \frac{\partial f}{\partial z} h - i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \bar{h}.$$

Así, df_z es \mathbb{C} -lineal si y solo si $df_z(ih) = i df_z(h)$ para todo h , y esto último equivale a la ecuación de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Finalmente, para probar que (3) implica (1), notamos que en este caso $df_z(h) = \frac{\partial f}{\partial z}h$ y luego (por definición) tenemos que

$$f(z+h) = f(z) + \frac{\partial f}{\partial z}(z)h + o(h),$$

y luego $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$ existe para todo $z \in \Omega$. \square

Observación importante 1.9.9. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ función \mathbb{R} -diferenciable en Ω . Si escribimos $z = x + iy$, y escribimos

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

con $u, v : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right)$$

Así, la ecuación de Cauchy-Riemann (compleja) $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ se traduce en las **ecuaciones de Cauchy-Riemann** (reales):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \& \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Ejemplo 1.9.10. —

- (1) Si $f(z) = z$ entonces $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, luego $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ es entera. Alternativamente, si escribimos $f(x + iy) = x + iy$ entonces $u(x, y) = x$, $v(x, y) = y$. Así, verificamos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

- (2) Si $f(z) = \bar{z}$, entonces $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 1 \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Alternativamente, si escribimos $f(x + iy) = x - iy$ entonces $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$. Así,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

- (3) Si $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$, entonces $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = z$ solo se anula en $z_0 = 0$. Alternativamente, si escribimos $f(x + iy) = x^2 + y^2$ entonces $u(x, y) = x^2 + y^2$, $v(x, y) = 0$. Así,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = 0 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x} \iff (x, y) = (0, 0).$$

Ejercicio 1.9.11. — Sea $f(x + iy) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ polinomio homogéneo de grado 3, donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Determinar cuándo f es holomorfa.

Indicación: Es mejor escribir

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

1.10. Operador Laplaciano y funciones armónicas

El operador Laplaciano es muy importante en matemáticas y en física. En \mathbb{R}^n está dado por

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

operando sobre funciones de clase \mathcal{C}^2 .

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ abierto no-vacío, y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ función compleja tal que $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ es holomorfa y además $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ ⁽⁶⁾, entonces las ecuaciones de Cauchy-Riemann (y el Teorema de Schwarz sobre la conmutatividad de las derivadas de segundo orden) implican:

$$(1) \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0.$$

$$(2) \quad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0.$$

Definición 1.10.1. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no vacío, y $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$. Decimos que u es **armónica** en Ω si $\Delta u = 0$ en Ω .

Observación 1.10.2. — Una prueba alternativa de (1) y (2) se obtiene al notar que

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \circ \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \stackrel{\text{def}}{=} 4 \frac{\partial}{\partial z} \circ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \circ \frac{\partial}{\partial z}$$

Luego, la ecuación de Cauchy-Riemann $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ implica

$$0 = \Delta f = \Delta u + i \Delta v$$

Así, $\Delta u = \Delta v = 0$.

Proposición 1.10.3. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no vacío y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ holomorfa tal que $u = \text{Re}(f)$ y $v = \text{Im}(f)$ son de clase \mathcal{C}^2 en Ω . Entonces, u y v son armónicas en Ω y se relacionan mediante las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

⁽⁶⁾Veremos más adelante que esta condición siempre se cumple.

Recíprocamente, si $u, v : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones de clase \mathcal{C}^2 en Ω verificando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, entonces u y v son armónicas en Ω y $f := u + iv$ es holomorfa en $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.

En tal caso, decimos que las funciones u y v son **armónicas conjugadas**.

Veremos pronto que $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ implica que $u, v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Ejemplo 1.10.4. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío.

(1) Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, entonces $g(z) := \bar{f}(z)$ (i.e. $g = \bar{f}$) es armónica en Ω . En efecto,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \iff 0 = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial g}{\partial z}.$$

Luego,

$$\Delta g = 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial g}{\partial z} \right) = 0.$$

(2) Si $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ entonces $h := f + \bar{g}$ es armónica en Ω .

Ejercicio 1.10.5. — Sea $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ función armónica en Ω . Probar que $f(x + iy) := \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(x, y)$ es holomorfa en Ω .

Corolario 1.10.6. — Sea $f \in \mathcal{O}^*(\Omega)$ (i.e., $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ holomorfa y $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$). Entonces, la función $\ln |f| : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $z \mapsto \ln |f(z)|$ es armónica en Ω .

Demostración. — Sea $z_0 \in \Omega$ y sea $\delta > 0$ tal que $f(D(z_0, \delta)) \subseteq D(f(z_0), \varepsilon)$ con $0 < \varepsilon < |f(z_0)|$, i.e., se tiene la situación de la figura.

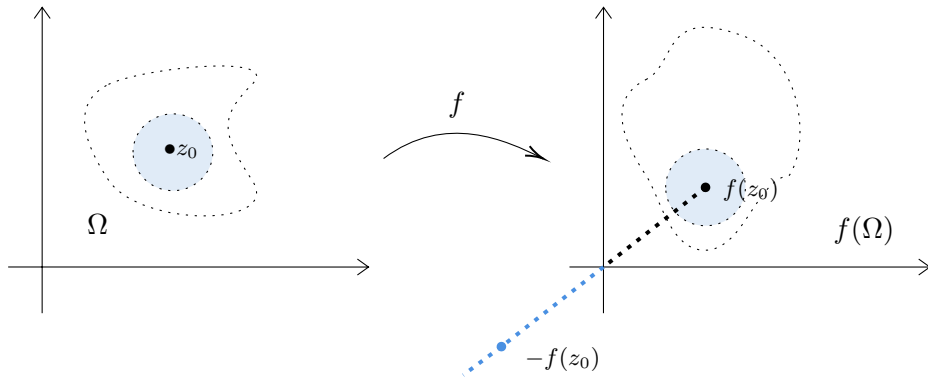


IMAGEN 16. La función f toma valores no-nulos.

Entonces, $D(f(z_0), \varepsilon)$ es disjunto de la semi-recta pasando por 0 y $-f(z_0)$, y luego podemos definir una rama \log_{θ_0} en $D(f(z_0), \varepsilon)$. Así,

$$\log_{\theta_0}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \ln |f(z)| + i \arg_{\theta_0}(f(z))$$

es holomorfa en $D(z_0, \delta)$. Por la Proposición anterior, tenemos que la parte real $\ln |f(z)| = \text{Re}(\log_{\theta_0}(f(z)))$ es armónica en $D(z_0, \delta)$. \square

Cultura general 1.10.7. — Históricamente (entre los siglos XVI y XVII) se tiene otra caracterización de las funciones holomorfas en términos de preservar ángulos, algo importante en cartografía. Si $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^2$ abiertos y $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ es una función diferenciable, entonces decimos que f es una **transformación conforme** si conserva ángulos.

Es un hecho clásico que $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ si y solo si f es conforme y preserva la orientación (i.e., $\det(df_z) > 0$ en Ω). Esto último es consecuencia de las ecuaciones de Cauchy-Riemann reales.

1.11. Integración de 1-formas y Teorema de Green

Recordemos las nociones necesarias para calcular integrales de línea.

Definición 1.11.1. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto conexo no-vacío. Una **1-forma diferencial** continua a valores complejos en Ω es una función continua

$$\begin{aligned} \omega : \Omega &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \\ x &\longmapsto \{\omega(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \text{ lineal}\} \end{aligned}$$

Si (x_1, \dots, x_n) son coordenadas en \mathbb{R}^n , entonces (dx_1, \dots, dx_n) es la base canónica de $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ como \mathbb{C} -espacio vectorial. Así, considerando coordenadas respecto a dicha base, toda 1-forma diferencial se escribe como

$$\omega(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n f_j(x_1, \dots, x_n) dx_j$$

donde $f_j : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ son funciones continuas.

Ejemplo importante 1.11.2. — Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ función de clase \mathcal{C}^p , con $p \geq 1$. Entonces, su diferencial

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$$

es una 1-forma diferencial en Ω .

Definición 1.11.3. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto conexo no-vacío. Un **camino de clase \mathcal{C}^p por pedazos** en Ω es una función continua

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega, \quad t \mapsto \gamma(t)$$

tal que existe una sub-división finita

$$a := \tau_0 < \tau_1 \cdots < \tau_{N-1} < \tau_N =: b$$

con $\gamma|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}$ de clase \mathcal{C}^p . Decimos que los $\gamma(\tau_i)$ son las *puntas* de γ .

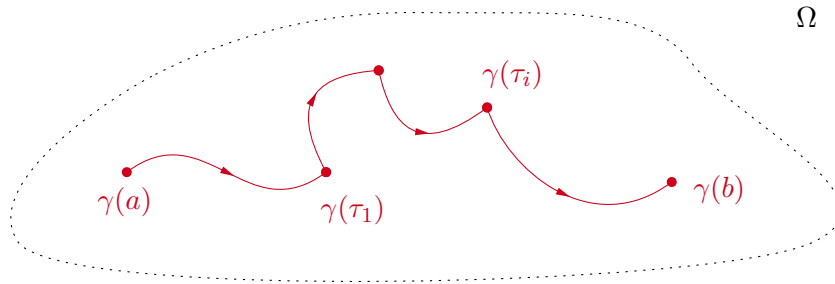


IMAGEN 17. Una curva de clase \mathcal{C}^p por pedazos.

Observación 1.11.4. —

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ un camino de clase \mathcal{C}^p por pedazos, $p \geq 1$.

- (1) El camino con **orientación decreciente**, denotado usualmente por $-\gamma$, está definido como $(-\gamma)(t) := \gamma(-t)$ para $-b \leq t \leq -a$. En otras palabras, se recorre la **curva** $\Gamma := \gamma([a, b])$ en sentido opuesto al original.
- (2) Definimos el **largo** o **longitud** de γ mediante

$$\ell(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \cdots + \gamma_n'(t)^2} dt$$

donde $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \in \mathbb{R}^n$.

- (3) Con la notación anterior, si $x_i := \gamma_i(t)$ entonces $dx_i = \gamma_i'(t) dt$ si γ es diferenciable en $t \in [a, b]$.

Definición 1.11.5. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no vacío, $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ un camino de clase \mathcal{C}^p por pedazos ($p \geq 1$) y

$$\omega = \sum_{j=1}^n f_j(x_1, \dots, x_n) dx_j$$

una 1-forma diferencial en Ω . Definimos la **integral de línea** de ω a lo largo de γ de la manera siguiente:

$$\int_{\gamma} \omega =: \int_{\gamma} \sum_{j=1}^n f_j(x_1, \dots, x_n) dx_j \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \sum_{j=1}^n f_j(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \gamma'_j(t) dt.$$

Definición 1.11.6. —

- (1) Sean $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \Omega$ y $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \Omega$ caminos de clase \mathcal{C}^p por pedazos. Decimos que γ_1 y γ_2 son **equivalentes**, y escribimos $\gamma_1 \sim \gamma_2$ si existe $\psi : [a_1, b_1] \xrightarrow{\sim} [a_2, b_2]$ **difeomorfismo** (i.e., ψ biyectiva, de clase \mathcal{C}^p , con derivadas por la izquierda y derecha distintas de cero) estrictamente creciente tal que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \psi$.
- (2) Una **curva orientada** de clase \mathcal{C}^p por pedazos es una clase de equivalencia de caminos de clase \mathcal{C}^p por pedazos. En particular, si $\gamma_1 \sim \gamma_2$ entonces se tiene que $\Gamma = \gamma_1([a_1, b_1]) = \gamma_2([a_2, b_2])$.

Observación 1.11.7. —

- (1) Por definición, $\int_{-\gamma} \omega = -\int_{\gamma} \omega$.
- (2) El valor de la integral de línea $\int_{\gamma} \omega$ **no** depende de la parametrización de γ . Más generalmente, si $\psi : [a', b'] \rightarrow [a, b]$ es un difeomorfismo definiendo una nueva parametrización (haciendo $t = \psi(s)$), tenemos:
 - a) Si ψ **preserva la orientación** (i.e., ψ creciente y $\psi(a') = a$, $\psi(b') = b$), entonces

$$\int_{\gamma \circ \psi} \omega = \int_{\gamma} \omega$$

- b) Si ψ **revierte la orientación** (i.e., ψ decreciente y $\psi(a') = b$, $\psi(b') = a$), entonces

$$\int_{\gamma \circ \psi} \omega = -\int_{\gamma} \omega$$

Luego, si $\gamma_1 \sim \gamma_2$ entonces (a) nos da $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$. Del mismo modo, la longitud $\ell(\gamma) = \ell(-\gamma)$ solo depende de la curva $\Gamma = \gamma([a, b]) \subseteq \Omega$ definida por γ .

Ejemplo importante 1.11.8. — En $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, si usamos la base $(dz, d\bar{z})$ de $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ (en lugar de (dx, dy)) entonces toda 1-forma diferencial se escribe de la forma

$$\omega = f(z, \bar{z})dz + g(z, \bar{z})d\bar{z},$$

donde $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ son continuas. Luego, si $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ es un camino de clase \mathcal{C}^p por pedazos, entonces

$$\int_{\gamma} \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b (f(\gamma(t), \overline{\gamma(t)})\gamma'(t) + g(\gamma(t), \overline{\gamma(t)})\overline{\gamma'(t)}) dt$$

Ejemplo 1.11.9. — Sea $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto re^{it}$ circunferencia de radio $r > 0$ centrada en el origen y orientada en sentido antihorario.

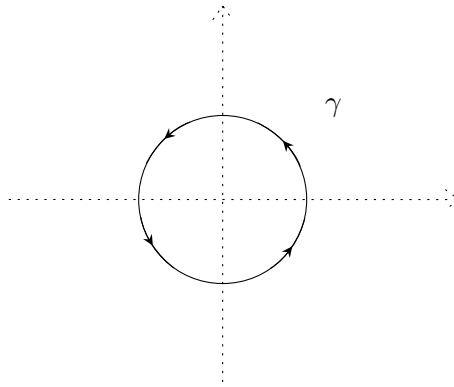


IMAGEN 18. Circunferencia orientada en sentido antihorario.

Sea $n \in \mathbb{Z}$ y $\omega = z^n dz$, entonces:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_{\gamma} z^n = \int_0^{2\pi} (re^{it})^n \frac{d}{dt}(re^{it}) dt \\ &= \int_0^{2\pi} r^n e^{itn} \cdot ire^{it} dt \\ &= ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} dt \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i & \text{si } n = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Proposición 1.11.10. — Sea ω una 1-forma diferencial continua y a valores complejos en Ω y sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ un camino de clase \mathcal{C}^1 por pedazos. Entonces:

(1) Si $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es de clase \mathcal{C}^1 en Ω , entonces

$$\int_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

En particular, $\int_{\gamma} df = 0$ si γ es una **curva cerrada** (i.e. $\gamma(a) = \gamma(b)$).

(2) Si $\omega = \sum_{j=1}^n f_j dx_j$, entonces

$$\left| \int_{\gamma} \omega \right| \leq \ell(\gamma) \sup_{t \in [a,b]} \|\omega(\gamma(t))\|$$

donde $\|\omega\| := \sqrt{\sum_{j=1}^n |f_j|^2}$.

(3) Se tiene que

$$\int_{\gamma} \omega = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=1}^n f_i(\gamma(\xi_j)) (\gamma_i(\tau_{j+1}) - \gamma_i(\tau_j))$$

donde la subdivisión $a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = b$ recorre el conjunto de todas las posibles subdivisiones de $[a, b]$ tales que $\max_{j=0, \dots, N-1} (\tau_{j+1} - \tau_j) \leq \varepsilon$ y donde los $\xi_j \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$ son puntos arbitrarios.

Demostración. — El punto (1) se deduce de la regla de la cadena

$$(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \gamma'_i(t)$$

de la definición de $\int_{\gamma} df$ y del Teorema Fundamental del Cálculo.

El punto (2) es consecuencia de la definición de $\int_{\gamma} \omega$ y la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\left| \sum_{j=1}^n f_j(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \gamma'_j(t) \right| \leq \|\omega(\gamma(t))\| \cdot \|\gamma'(t)\|.$$

Finalmente, notemos que

$$\left| \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \sum_{i=1}^n f_i(\gamma(t)) \gamma'_i(t) dt - \sum_{i=1}^n f_i(\gamma(\xi_j)) (\gamma_i(\tau_{j+1}) - \gamma_i(\tau_j)) \right| \leq M_j \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \|\gamma'(t)\| dt,$$

donde

$$M_j = \sup_{t \in [\tau_j, \tau_{j+1}]} \|\omega \circ \gamma(t) - \omega \circ \gamma(\xi_j)\|$$

Como $\max_{j=0, \dots, N-1} M_j \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ por continuidad uniforme de $\omega \circ \gamma$ en el compacto $[a, b]$ (Teorema de Heine-Cantor), deducimos (3). \square

Para enunciar el Teorema de Green debemos considerar compactos y sus bordes, y preocuparnos por la orientación de estos últimos.

Definición 1.11.11. — Sea $K \subseteq \mathbb{R}^2$ un compacto no-vacío y $p \geq 1$. Decimos que K tiene **borde de clase \mathcal{C}^p por pedazos** si para todo $z_0 \in \partial K$, existen coordenadas (u, v) centradas en z_0 y un rectángulo $R = \{-\epsilon < u < \epsilon\} \times \{-\delta < v < \delta\}$ suficientemente pequeño tal que

$$K \cap R = \{(u, v) \in R : v \geq h(u)\}$$

donde h es de clase \mathcal{C}^p por pedazos en $] - \epsilon, \epsilon[$ con $h(0) = 0$ y $\sup |h| < \delta$.

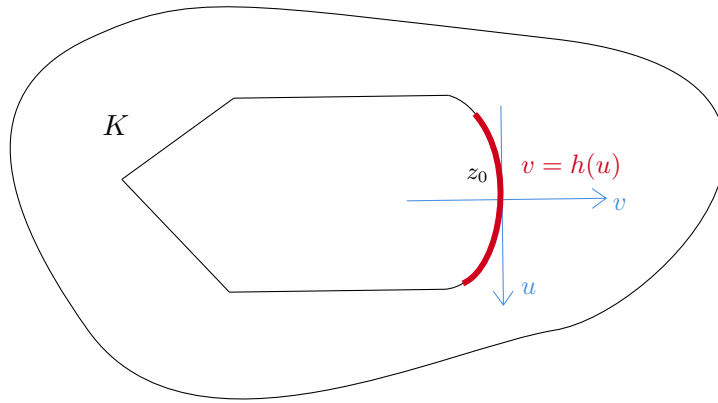


IMAGEN 19. Compacto con borde de clase \mathcal{C}^p por pedazos.

Observaciones. Sea $K \subseteq \mathbb{R}^2$ compacto con borde de clase \mathcal{C}^p por pedazos.

- (1) Si K compacto, entonces ∂K es compacto y luego ∂K puede ser cubierto por finitos rectángulos $R = R_{z_0}$ con $z_0 \in \partial K$.
- (2) Dado que $\partial K \cap R_{z_0} = \text{Gr}(h) \stackrel{\text{def}}{=} \{(u, v) \in R_{z_0} : v = h(u)\}$ es el **grafo de h** , tenemos que ∂K se puede parametrizar usando finitos caminos de la forma $\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \partial K, u \mapsto (u, h(u))$.

Ejercicio 1.11.12. — Un **agujero** de un compacto $K \subseteq \mathbb{R}^2$ es una componente conexa acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus K$. Probar que si K tiene borde de clase \mathcal{C}^p por pedazos entonces K posee a lo más un número finito de agujeros.

Indicación: Cada agujero está bordeado por los caminos $u \mapsto (u, h(u))$.

Definición 1.11.13. — Sea $K \subseteq \mathbb{R}^2$ un compacto con borde de clase \mathcal{C}^p por pedazos. Decimos que ∂K está **orientada (canónicamente)** si cada uno de

los ejes coordenados $(z_0; (e_1(z_0), e_2(z_0)))$ definiendo las coordenadas (u, v) en R_{z_0} están orientados positivamente respecto a la base canónica \mathcal{C} de \mathbb{R}^2 , i.e.,

$$\det_{\mathcal{C}}(e_1(z_0), e_2(z_0)) > 0.$$

Concretamente, orientamos ∂K al considerar uno de los caminos $u \mapsto (u, h(u))$ (que describen localmente a ∂K) en la dirección de u **creciente**, i.e., si nos imaginamos caminando a lo largo del borde ∂K entonces el interior $\text{int}(K)$ debe estar a nuestra izquierda.

Ejemplo 1.11.14. — El borde del siguiente compacto está orientado canónicamente:

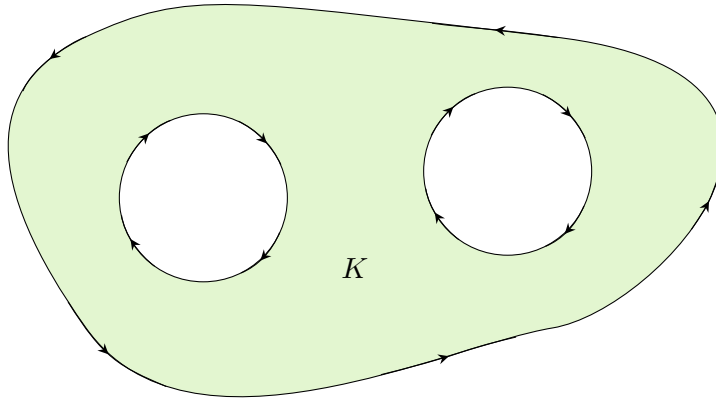


IMAGEN 20. Un conjunto compacto orientado canónicamente.

El último ingrediente que necesitamos son las 2-formas diferenciales.

Definición 1.11.15. — Sea $V \cong \mathbb{R}^2$ y sean $\alpha, \beta : V \rightarrow \mathbb{R}$ dos formas lineales, definimos el **producto exterior** $\alpha \wedge \beta$ como la forma bilineal alternada $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$(\alpha \wedge \beta)(\xi, \eta) := \alpha(\xi)\beta(\eta) - \alpha(\eta)\beta(\xi), \text{ para todos } \xi, \eta \in V.$$

Luego, tenemos que $\alpha \wedge \alpha \stackrel{\text{def}}{=} 0$ y $\beta \wedge \alpha \stackrel{\text{def}}{=} -\alpha \wedge \beta$.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no-vacío y definamos

$$A^p(\mathbb{R}^n) := \{\varphi : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ } p\text{-lineal alternada}\}$$

Una **p -forma diferencial** continua y a valores reales en Ω es una función continua $\omega : \Omega \rightarrow A^p(\mathbb{R}^n)$, $x \mapsto \omega(x)$.

Ejemplo importante 1.11.16. — Sean (x, y) coordenadas en \mathbb{R}^2 . Entonces (dx, dy) es la base canónica (dual) de $A^1(\mathbb{R}^2) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{R}^2)^*$. Luego,

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0 \quad \text{y} \quad dx \wedge dy = -dy \wedge dx$$

son los únicos productos exteriores relevantes. Explícitamente, si $\xi = (a, b)$, $\eta = (c, d) \in \mathbb{R}^2$ entonces

$$(dx \wedge dy)(\xi, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} ad - bc \stackrel{\text{def}}{=} \det_{\mathcal{C}}(\xi, \eta)$$

Así, tal como $\det_{\mathcal{C}}$ permite calcular el área (con signo) de un paralelogramo en \mathbb{R}^2 , podemos pensar $dx \wedge dy$ como una expresión de la medida de área (de Lebesgue) $dxdy$ en \mathbb{R}^2 .

La siguiente observación resume la información relevante para nosotros en el caso de $V = \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$.

Observación 1.11.17. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto no-vacío. Entonces, si $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$:

- (1) Una 1-forma diferencial en Ω está dada por $\omega = fdx + gdy$, y si $z = (x, y) \in \Omega$, entonces

$$(\omega(z))(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, y)\xi_1 + g(x, y)\xi_2$$

- (2) Una 2-forma diferencial en Ω está dada por $\alpha = hdx \wedge dy$, y si $z = (x, y) \in \Omega$ entonces

$$(\alpha(z))(\xi, \eta) = h(x, y)(\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2)$$

Definición 1.11.18. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no-vacío, y sea $\omega = \sum_{j=1}^n f_j dx_j$ una 1-forma diferencial de clase \mathcal{C}^1 en Ω (a valores reales o complejos). Definimos su **diferencial exterior** mediante

$$d\omega := \sum_{j=1}^n df_j \wedge dx_j, \quad \text{donde } df_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i$$

En particular, si $n = 2$ y $\omega = u(x, y)dx + v(x, y)dy$ entonces

$$d\omega = du \wedge dx + dv \wedge dy = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

Con todo lo anterior en mente, podemos enunciar el Teorema de Green. Este resultado fue enunciado por Green en 1828, aunque ya era conocido por Euler en el siglo XVIII, y fue probado por Riemann en su tesis doctoral en 1851. Se trata de un caso particular del Teorema de Stokes sobre integración en variedades compactas orientables (con borde).

Teorema 1.11.19 (Teorema de Green). — Sea $K \subseteq \mathbb{R}^2$ un compacto no-vacío, con borde ∂K de clase \mathcal{C}^1 por pedazos y orientado canónicamente. Entonces, para toda 1-forma diferencial $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ de clase \mathcal{C}^1 en una vecindad de K se tiene que

$$\int_{\partial K} \omega = \int_K d\omega,$$

i.e.,

$$\int_{\partial K} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

1.12. Teoremas de Cauchy y Goursat

El Teorema de Cauchy es un resultado central en Análisis Complejo, y fue enunciado por Cauchy en 1825 y probado por Riemann en 1851 para funciones holomorfas de clase \mathcal{C}^1 . Finalmente, Goursat prueba en 1884 la versión general, donde no asume la condición de ser de clase \mathcal{C}^1 .

Teorema 1.12.1. — (Teorema de Cauchy) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $K \subseteq \mathbb{C}$ un compacto no vacío con borde de clase \mathcal{C}^1 por pedazos y orientado canónicamente tal que $K \subseteq \Omega$. Entonces, para toda función holomorfa $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que f es de clase \mathcal{C}^1 en Ω se tiene que

$$\int_{\partial K} f(z)dz = 0$$

Demostración. — (Riemann) Consideremos la 1-forma diferencial $\omega = f(z)dz$ de clase \mathcal{C}^1 . Luego,

$$d\omega \stackrel{\text{def}}{=} df \wedge dz = \left(\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) \wedge dz = 0$$

pues $dz \wedge dz = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ (Cauchy-Riemann). Así, el Teorema de Green implica que

$$\int_{\partial K} \omega = \int_K d\omega = 0$$

□

Para eliminar la hipótesis $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ comenzamos por analizar el caso en que K es un triángulo, y por ende un compacto de clase \mathcal{C}^∞ por pedazos.

Lema 1.12.2. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $T \subseteq \Omega$ un triángulo. Entonces,

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0 \quad \forall f \in \mathcal{O}(\Omega)$$

Demostración. — Sea $I := \int_{\partial T} f(z)dz \in \mathbb{C}$. Dividamos T en 4 triángulos T_1, \dots, T_4 con vértices en los puntos medios de los lados de T .

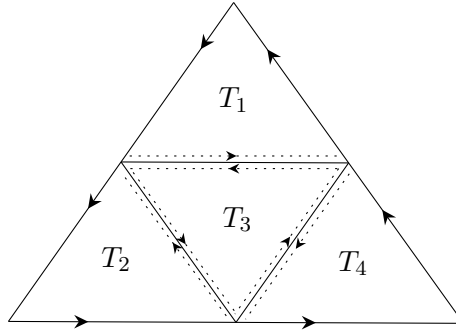


IMAGEN 21. Sub-división en triángulos.

Entonces $I = \sum_{k=1}^4 \int_{\partial T_k} f(z)dz$ y luego existe $k \in \{1, \dots, 4\}$ tal que

$$\left| \int_{\partial T_k} f(z)dz \right| \geq \frac{|I|}{4}$$

Inductivamente, construimos triángulos $T'_0 \supseteq T'_1 \supseteq T'_2 \supseteq \dots$ con $T'_0 = T$, $T'_1 = T_k$, etc., con

$$\text{diam}(T'_n) = \frac{\text{diam}(T)}{2^n} \quad \text{y} \quad \left| \int_{\partial T'_n} f(z)dz \right| \geq \frac{|I|}{4}$$

Luego, por la proposición 1.3.7 (c.f. §1.3) existe un único $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $z_0 \in T'_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, i.e. $\bigcup_{n \geq 0} T'_n = \{z_0\}$. Dado que f es holomorfa en z_0 , tenemos que

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + (z - z_0)\epsilon(z)$$

y $\lim_{z \rightarrow z_0} \epsilon(z) = 0$. Por otro lado, si

$$g(z) := f(z_0)z + \frac{1}{2}(z - z_0)^2 f'(z_0)$$

entonces g es holomorfa y $dg \stackrel{\text{def}}{=} (f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0))dz$ y luego $\int_{\partial T'_n} dg = 0$. Así,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial T'_n} f(z)dz \right| &= \left| \int_{\partial T'_n} (z - z_0)\epsilon(z)dz \right| \leq \ell(\partial T'_n) \sup_{\partial T'_n} |z - z_0| \cdot |\epsilon(z)| \\ &\leq 3(\text{diam}(T'_n))^2 \sup_{\partial T'_n} |\epsilon(z)| \end{aligned}$$

Por tanto

$$|I| \leq 4^n \left| \int_{\partial T'_n} f(z)dz \right| \leq 3(\text{diam}(T))^2 \sup_{\partial T'_n} |\epsilon(z)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

□

Teorema 1.12.3. — (Teorema de Goursat). Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $K \subseteq \mathbb{C}$ un compacto no vacío con borde de clase \mathcal{C}^1 por pedazos y orientado canónicamente tal que $K \subseteq \Omega$. Entonces para toda función holomorfa $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ se tiene que

$$\int_{\partial K} f(z)dz = 0$$

Demostración. — Sea $\delta = \text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0$. Parametrizamos ∂K usando finitos caminos de clase \mathcal{C}^1 por pedazos y por cada uno de dichos caminos $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ consideramos subdivisión $a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = b$ tal que $|\gamma(\tau_{j+1}) - \gamma(\tau_j)| \leq \epsilon \leq \delta/2$. Entonces, cada segmento $[\gamma(\tau_j), \gamma(\tau_{j+1})]$ está contenido en Ω . Para $0 < \epsilon \ll 1$, la unión de dichos segmentos forman el borde de un compacto K_ϵ con borde poligonal.

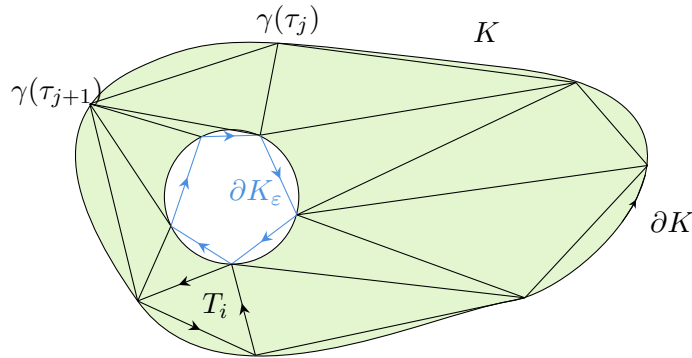


IMAGEN 22. Triangulación de un compacto.

Dicho compacto es triangulable, i.e., $K_\epsilon = \bigcup_i T_i$, y luego por el lema de Goursat

$$\int_{\partial K_\epsilon} f(z)dz = \sum_i \int_{\partial T_i} f(z)dz = 0$$

Finalmente, por la proposición 1.11.10 (c.f. §1.11)

$$0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial K_\epsilon} f(z)dz = \int_{\partial K} f(z)dz,$$

de donde se obtiene el resultado. \square

1.13. Fórmula de Cauchy y Fórmula de Pompeiu

Durante esta sección, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ será un conjunto abierto no vacío.

Teorema 1.13.1. — (Fórmula de Cauchy). Sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y sea $K \subseteq \Omega$ un compacto no vacío de borde de clase \mathcal{C}^1 por pedazos y orientado canónicamente. Entonces, para todo punto $z \in \text{int}(K)$ se tiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

En particular, f está determinada por sus valores en ∂K .

Demostración. — Sea $\rho > 0$ tal que $\overline{D}(z, \rho) \subseteq \text{int}(K)$, y sea $K_\rho := K \setminus D(z, \rho)$.

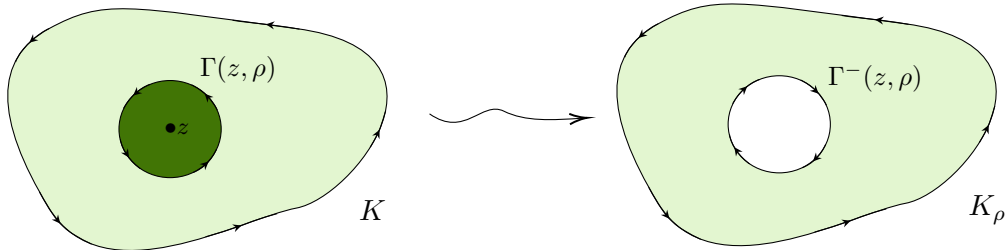


IMAGEN 23. El nuevo compacto K_ρ

Luego, $\partial K_\rho = \partial K \cup \Gamma^-(z, \rho)$. Sea $g(w) = f(w)/(w-z)$ función holomorfa en $\Omega \setminus \{z\}$. Como $K_\rho \subseteq \Omega \setminus \{z\}$, el Teorema de Cauchy nos da

$$0 = \int_{\partial K_\rho} g(w)dw = \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{\Gamma(z, \rho)} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

Para calcular la última integral de línea, parametrizamos $\Gamma(z, \rho)$ usando $\gamma(t) = z + \rho e^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$, luego

$$\int_{\Gamma(z, \rho)} \frac{f(w)}{w - z} dw \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \rho e^{it})}{\rho e^{it}} i \rho e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{it}) dt =: I_\rho$$

Finalmente, por la continuidad de f

$$\begin{aligned} \left| i \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{it}) dt - 2\pi i f(z) \right| &= \left| \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{it}) dt - \int_0^{2\pi} f(z) dt \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} |f(z + \rho e^{it}) - f(z)| dt \\ &\xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

de donde $\lim_{\rho \rightarrow 0} I_\rho = 2\pi i f(z)$. \square

Cultura general 1.13.2. — La fórmula de Pompeiu (1905) es una generalización de la fórmula de Cauchy para funciones no necesariamente holomorfas: Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto con borde orientado de clase \mathcal{C}^1 por pedazos, y denotamos por $d\lambda(z) := dx dy$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, entonces

(1) Para toda función $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ de clase \mathcal{C}^1 se tiene

$$\int_{\partial K} f(z) dz = 2i \int \int_K \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\lambda(z)$$

(2) Si $z \in \text{int}(K)$, entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{\pi} \int_K \frac{1}{w - z} \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} d\lambda(w)$$

La prueba usa el Teorema de Green y el Teorema de Convergencia Dominada.

Ejemplo 1.13.3. —

(1) Sea $K = \overline{D}(0, 2)$ y $\Gamma = \partial K$ círculo de radio 2 centrado en el origen, y sea $f(z) = z/(9 - z^2)$ función holomorfa en una vecindad abierta de K .

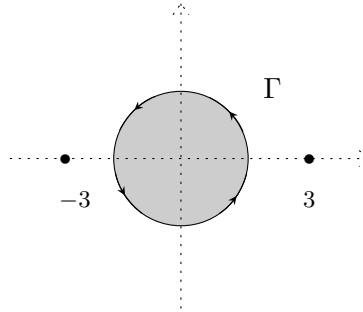
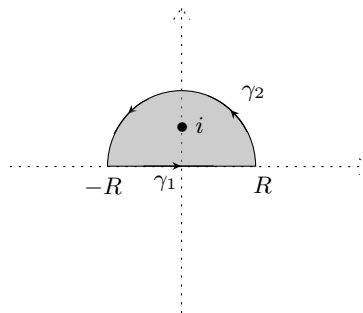
Luego, la fórmula de Cauchy aplicada a $z_0 = -i \in \text{int}(K)$ nos da:

$$\int_{\Gamma} \frac{z/(9 - z^2)}{z - (-i)} dz = \int_{\Gamma} \frac{z}{(9 - z^2)(z + i)} dz = 2\pi i f(-i) = 2\pi i \left(\frac{-i}{10} \right) = \frac{\pi}{5}$$

(2) (c.f. distribución de Cauchy). Sea $a \in \mathbb{R}^{>0}$ y consideremos la integral

$$I(a) := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 + 1} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2 + 1} dx$$

por paridad. Sea $f(z) = e^{iaz}/(z^2 + 1)$ función holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, y sea $\Gamma = \partial K$ donde K es el semicírculo:

IMAGEN 24. El disco cerrado de radio 2 centrado en $z_0 = 0$.IMAGEN 25. Semi-círculo de radio $R > 1$.

Notemos que f no es holomorfa en K , sin embargo podemos escribir $f(z) = g(z)/(z - i)$ con $g(z) = e^{iaz}/(z + i)$ holomorfa en K . La fórmula de Cauchy aplicada a $z_0 = i \in \text{int}(K)$ nos da:

$$\int_{\partial K} f(z) dz = \int_{\partial K} \frac{g(z)}{z - i} dz = 2\pi i g(i) = 2\pi i \frac{e^{-a}}{2i} = \pi e^{-a}$$

Por otro lado,

$$\int_{\partial K} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz = I_1 + I_2$$

a) Para I_1 , $\gamma_1(t) = t$ con $t \in [-R, R]$ y luego

$$I_1 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-R}^R \frac{e^{iat}}{t^2 + 1} dt \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} I(a)$$

b) Para I_2 , $\gamma_2(t) = Re^{it}$ con $t \in [0, \pi]$, y luego:

$$I_2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\pi \frac{e^{iaRe^{it}}}{R^2 e^{i2t} + 1} \cdot iRe^{it} dt = \int_0^\pi h(t) dt$$

con

$$|h(t)| = \frac{R}{|R^2 e^{i2t} + 1|} \cdot |e^{iaRe^{it}}| \leq \frac{R}{R^2 - 1} e^{-aR \sin(t)} \leq \frac{R}{R^2 - 1}$$

Luego

$$|I_2| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 1} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

Así.

$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-a}$$

Por paridad, obtenemos

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a} \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

1.14. Diferenciabilidad de funciones holomorfas y Teorema de Morera

Una de las aplicaciones más notables y espectaculares de la fórmula de Cauchy es el siguiente resultado:

Teorema 1.14.1. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $K \subseteq \Omega$ compacto no vacío con borde ∂K de clase \mathcal{C}^1 por pedazos. Entonces, **toda** función holomorfa $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ es de clase \mathcal{C}^∞ en Ω . Más aún, para todo punto interior $z_0 \in \text{int}(K)$

(1) Para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z_0) = f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

(2) Para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$

$$\frac{\partial^{n+m} f}{\partial z^n \partial \bar{z}^m}(z_0) = \frac{\partial^{n+m} f}{\partial \bar{z}^m \partial z^n}(z_0) = 0$$

En particular, una función holomorfa $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ posee derivadas complejas $f^{(n)}$ de orden arbitrario y además $f^{(n)} \in \mathcal{O}(\Omega)$ para todo $n \geq 1$.

Demostración. — Dividiendo el borde ∂K en N caminos γ_j de clase \mathcal{C}^1 , tenemos que:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w - z} dw \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^N \frac{1}{2\pi i} \int_{a_j}^{b_j} \frac{f(\gamma_j(t))}{\gamma_j(t) - z} \gamma_j'(t) dt$$

Como $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, f es continua en Ω y la última integral puede considerarse una función en la variable z . Dado que la función $w \mapsto \frac{1}{w-z}$ es de clase \mathcal{C}^∞ en $\Omega \setminus \{z\}$, el resultado se obtiene por inducción usando las fórmulas

$$\frac{\partial^m}{\partial z^m} \left(\frac{1}{w-z} \right) (z_0) = \frac{n!}{(w-z_0)^{m+1}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^{n+m}}{\partial z^n \partial \bar{z}^m} \left(\frac{1}{w-z} \right) = 0 \text{ si } m > 0$$

□

Ejemplo 1.14.2. —

(1) La integral

$$I = \int_{\partial \bar{D}(0,4)} \frac{\sin(z)}{(z-\pi)^4} dz$$

Se calcula considerando $f(z) = \sin(z)$ y luego $f^{(3)}(z) = -\cos(z)$ y luego

$$I = \frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(\pi) = -\frac{2\pi i}{6} \cos(\pi) = \frac{i\pi}{3}$$

(2) Consideremos

$$I = \int_{\partial \bar{D}(i,2)} \frac{1}{(z^2+4)^2} dz = \int_{\partial \bar{D}(i,2)} \frac{f(z)}{(z-2i)^2} dz$$

con $f(z) = 1/(z+2i)^2$ holomorfa en $\bar{D}(i,2)$. Entonces

$$f'(z) = -\frac{2}{(z+2i)^3} \implies I = \frac{2\pi i}{1!} f'(2i) = 2\pi i \cdot \frac{(-2)}{4^3 \cdot i^3} = \frac{\pi}{16}$$

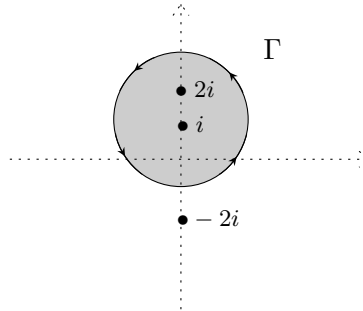


IMAGEN 26. Círculo de radio 2 centrado en $z_0 = i$.

Ejercicio 1.14.3. — Sea $a \in \mathbb{R}^{>0}$, calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{(x^2+1)^2} dx$$

El siguiente resultado es el recíproco del lema de Goursat, y será relevante más adelante para probar holomorfía en ciertos contextos.

Teorema 1.14.4. — (Teorema de Morera) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no vacío, y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ función continua. Si suponemos que

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0 \quad \text{para todo triángulo } T \subseteq \Omega$$

entonces f es holomorfa en Ω .

Demostración. — Sea $z_0 \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subseteq \Omega$. Para $z \in D(z_0, r)$ definimos

$$F(z) := \int_{[z_0, z]} f(w)dw$$

donde $[z_0, z]$ es el segmento que une z_0 a z .

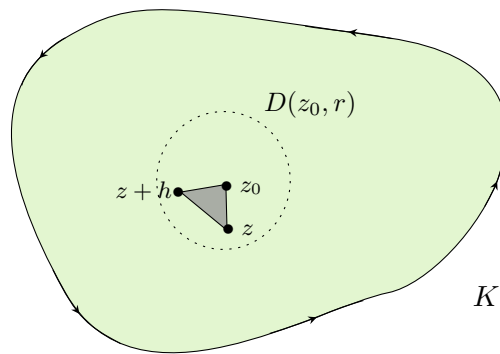


IMAGEN 27. Ilustración del Teorema de Morera.

Luego, para $z \in D(z_0, r)$ y $h \neq 0$ tal que $z + h \in D(z_0, r)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{h} \left(\int_{[z_0, z+h]} f(w)dw - \int_{[z_0, z]} f(w)dw \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_{\partial T} f(w)dw - \int_{[z+h, z]} f(w)dw \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_{[z, z+h]} f(w)dw \right) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{h} \left(\int_0^1 f(z+th)h dt \right) \end{aligned}$$

La continuidad de f en z_0 implica entonces que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z)$$

y luego $F \in \mathcal{O}(\Omega)$. En particular, $F'(z) = f(z)$ es holomorfa en Ω también. \square

1.15. Desigualdad de Cauchy y Teorema de Liouville

La fórmula de Cauchy para las derivadas de funciones holomorfas permite obtener las siguientes estimaciones a priori, probadas por Cauchy en 1884.

Teorema 1.15.1. — (Desigualdad de Cauchy) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no vacío, $z \in \Omega$, y $r > 0$ tal que $\overline{D}(z, r) \subseteq \Omega$. Entonces, para toda $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y $n \geq 0$ se tiene que

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{\partial \overline{D}(z, r)} |f|$$

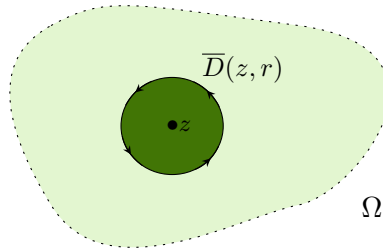


IMAGEN 28. La desigualdad de Cauchy permite estimar derivadas.

Demostración. — La fórmula de Cauchy sobre el compacto $\overline{D}(z, r)$ y utilizando la parametrización $\gamma(t) = z + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, tenemos

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z) &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial \overline{D}(z, r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{n!}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) \frac{e^{-i(n+1)t}}{r^{n+1}} rie^{it} dt \\ \implies |f^{(n)}(z)| &\leq \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f(z + re^{it})| dt \leq \frac{n!}{2\pi r^n} \sup_{\partial \overline{D}(z, r)} |f| \end{aligned}$$

□

Corolario 1.15.2. — Sea f una función entera (i.e., $f \in \mathcal{O}(\Omega)$) tal que existe $A, B \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ tal que para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene

$$|f(z)| \leq A(1 + |z|)^B$$

i.e. f crece de manera polinomial cuando $|z| \rightarrow +\infty$. Entonces, f es un polinomio de grado menor o igual a B .

Demostración. — Sea $\lfloor B \rfloor \in \mathbb{N}$ la parte entera de B y sea $n := \lfloor B \rfloor + 1 > B$. Luego, para todo $z \in \mathbb{C}$ y todo $r > 0$ se tiene

$$\sup_{\partial \overline{D}(z, r)} |f| = \sup_{t \in [0, 2\pi]} |f(z + re^{it})| \leq A(1 + |z + re^{it}|)^B \leq A(1 + |z| + r)^B$$

y por la desigualdad de Cauchy

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{r^n} A(1 + |z| + r)^B \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$$

Luego, $|f^{(n)}(z)| = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y luego f es un polinomio de grado menor o igual a $n - 1 = \lfloor B \rfloor$.

□

El caso $B = 0$ del corolario anterior fue enunciado por Cauchy en 1844 y probado en 1847 por Liouville.

Teorema 1.15.3. — (*Teorema de Liouville*) Sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ función entera y acotada (i.e., existe $A \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ tal que $|f(z)| \leq A$ para todo $z \in \mathbb{C}$). Entonces f es constante.

Una consecuencia importante es el famoso

Teorema 1.15.4. — (*Teorema Fundamental del Álgebra*) \mathbb{C} es algebraicamente cerrado, i.e., todo polinomio $P \in \mathbb{C}[z]$ de grado $d \geq 1$ posee una raíz en \mathbb{C} .

Demostración. — Supongamos por contradicción que existe

$$P(z) = a_d z^d + \cdots + a_1 z + a_0$$

tal que $P(w) \neq 0$ para todo $w \in \mathbb{C}$. Entonces $f(z) := 1/P(z)$ es entera y

$$|f(z)| \cong \frac{1}{|a_d| \cdot |z|^d}$$

tiende a cero cuando $|z| \rightarrow +\infty$. En particular, f es acotada y luego constante gracias al Teorema de Liouville. De esta forma, $P = 1/f$ es constante, lo que es una contradicción. □

Ejercicio 1.15.5. — Sea $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ función entera y sea $u : \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función armónica $u := \operatorname{Re}(f)$. Probar que si u está acotada superiormente (i.e., existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $u(x, y) \leq M$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$) entonces u es una función constante.

Indicación: Considerar $g(z) := \exp(f(z))$.

1.16. Funciones analíticas

Una función real $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es analítica si converge a su serie de Tylor. Esto implica en particular que es de clase \mathcal{C}^∞ . Sin embargo,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

es de clase \mathcal{C}^∞ y no es analítica (pues $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \geq 0$). En el caso de $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ hay dos nociones naturales de analiticidad.

Definición 1.16.1. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no vacío y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ función. Decimos que:

- (1) f es **\mathbb{R} -analítica** si para todo $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, existe una vecindad abierta V de z_0 tal que

$$f(x, y) = \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2} a_{\alpha, \beta} (x - x_0)^\alpha (y - y_0)^\beta$$

para todo $z = (x, y) \in V$, con convergencia normal en V .

- (2) f es **\mathbb{C} -analítica** si para todo $z_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{C}$, existe una vecindad abierta V de z_0 tal que

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z - z_0)^n$$

para todo $z \in V$, con convergencia normal en V .

Observación 1.16.2. — (c.f. §1.6) Tanto en el caso \mathbb{R} -analítico como en el \mathbb{C} -analítico tenemos que las series anteriores son derivables término a término. En particular, sus coeficientes están únicamente determinados por las fórmulas

$$a_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\alpha!\beta!} \frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}(x_0, y_0) \quad \text{y} \quad a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dz^n}(z_0)$$

Ejercicio 1.16.3. —

- (1) Probar que si $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ es \mathbb{C} -analítica, entonces es \mathbb{R} -analítica.

Indicación: $(z - z_0)^n = ((x - x_0) + i(y - y_0))^n$ y usar Newton.

- (2) Probar que la función $f(z) = \bar{z}$ es \mathbb{R} -analítica pero no es \mathbb{C} analítica.

El resultado principal de esta sección relaciona las nociones de holomorfía y analiticidad.

Teorema 1.16.4. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no vacío y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ función. Entonces, las condiciones siguientes son equivalentes:

- (1) f es holomorfa en Ω .
 (2) f es \mathbb{C} -analítica en Ω .

Demostración. — (2) implica (1) ya fue probado en §1.6. Para ver que (1) implica (2), sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y sean $z_0 \in \Omega$, $r > 0$ tal que $\bar{D}(z_0, r) \subseteq \Omega$.

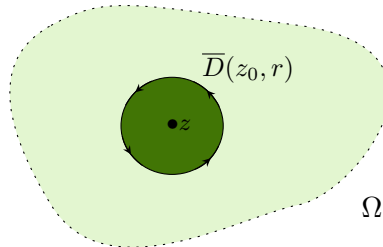


IMAGEN 29. Disco cerrado al interior de Ω .

Para $z \in \text{int}(\bar{D}(z_0, r)) \stackrel{\text{def}}{=} D(z_0, r)$, la fórmula de Cauchy implica que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{D}(z_0, r)} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Escribamos

$$\begin{aligned} \frac{1}{w-z} &= \frac{1}{w-z_0} \left(\frac{1}{1 - (z-z_0)/(w-z_0)} \right) \\ &= \frac{1}{w-z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} \end{aligned}$$

Entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{D}(z_0, r)} f(w) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} dw$$

Luego, si $w = z_0 + re^{it}$ entonces

$$\left| \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} \right| = \frac{1}{r} \left(\frac{|z-z_0|^n}{r} \right) \quad \text{con} \quad M = \frac{|z-z_0|}{r}$$

Así, la serie converge normalmente para todo $t \in [0, \pi]$ y luego

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{con} \quad a_n \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\partial \bar{D}(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} = \frac{1}{n!} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

y luego f es \mathbb{C} -analítica en $\bar{D}(z_0, r)$. □

La demostración anterior nos muestra que $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ es analítica en todo disco cerrado contenido en Ω , en particular:

Corolario 1.16.5. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no vacío y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Entonces, para todo $z_0 \in \Omega$ tenemos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

donde el radio de convergencia R de esta serie verifica que

$$R \geq \text{dist}(z_0, \Omega^c)$$

1.17. Ceros de funciones holomorfas

Una consecuencia importante de que toda función holomorfa es analítica, es el siguiente resultado sobre los ceros de dichas funciones.

Teorema 1.17.1. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo no vacío y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ una función holomorfa no idénticamente nula (i.e., existe $z_0 \in \Omega$ tal que $f(z_0) \neq 0$). Entonces, el conjunto de ceros

$$V(f) := f^{-1}(0) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \Omega \text{ tal que } f(z) = 0\} \subseteq \Omega$$

consiste en **puntos aislados** (i.e., para todo $z \in V(f)$ existe una vecindad abierta $U_z \subseteq \Omega$ tal que $V(f) \cap U_z = \{z\}$).

Antes de probar el resultado anterior, recordemos la siguiente caracterización de conjuntos aislados.

Lema 1.17.2. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío, y sea $A \subseteq \Omega$ un subconjunto. Las siguientes propiedades son equivalentes:

- (1) $A \subseteq \Omega$ es un cerrado formado por puntos aislados.
- (2) A es **localmente finito** en Ω , i.e., todo punto $x \in \Omega$ posee una vecindad abierta U_x tal que $A \cap U_x$ es un conjunto finito.
- (3) Para todo compacto $K \subseteq \Omega$, la intersección $A \cap K$ es un conjunto finito.
- (4) El conjunto A es finito o numerable, y si $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es infinito, entonces

$$\|a_n\| + \frac{1}{\text{dist}(a_n, \partial\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

i.e., los puntos a_n se alejan al infinito o bien tienden al borde de Ω .

Demostración. — Para ver que (1) implica (2), notemos que $A \cap U_x$ es vacío o $\{x\}$ si U_x es suficientemente pequeño. Por otra parte, (2) implica (3) gracias a la caracterización de compacidad mediante subcobrimientos finitos.

Para ver que (3) implica (4), Consideremos para todo $m > 0$

$$K_m := \{x \in \Omega \text{ tal que } \|x\| \leq m \text{ y } \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq 1/m\}.$$

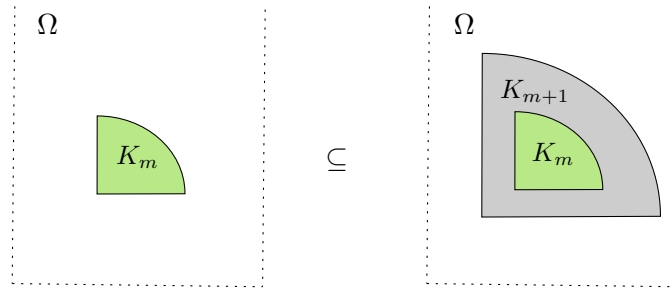


IMAGEN 30. La familia de compactos K_m .

Entonces, K_m son compactos en Ω tal que $\Omega = \bigcup_{m>0} K_m$ y $K_m \subseteq \text{int}(K_m)$. Entonces, $A \cap K_m$ es finito por hipótesis, con $A \cap K_m = \subseteq \{a_0, a_1, \dots, a_{n_m}\}$. Luego, $A \cap (K_m \setminus K_{m-1}) = \{a_{n_{m-1}+1}, \dots, a_{n_m}\}$ y por ende si $n > n_m$ entonces $a_n \notin K_m$, lo que implica por definición de K_m

$$\|a_n\| + \frac{1}{\text{dist}(a_n, \partial\Omega)} \geq m$$

El hecho de que (4) implica (1) queda como Ejercicio. \square

Observación importante 1.17.3. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no vacío. Entonces, si Ω es conexo (i.e., no existen Ω_1, Ω_2 abiertos no vacíos tales que $\Omega_i \subseteq \Omega$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ y $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$) y $X \subseteq \Omega$ es abierto y cerrado, entonces $X = \emptyset$ o bien $X = \Omega$.

Demostración. — Sea

$$X := \{z_0 \in \Omega \text{ tal que para todo } n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(z_0) = 0\} = \bigcap_{n \geq 0} V(f^{(n)})$$

Dado que cada $V(f^{(n)})$ es cerrado en Ω , tenemos que X también lo es. Además, $X \neq \Omega$ pues f no es idénticamente nula.

Por otro lado, X es abierto en Ω : si $z_0 \in \Omega$, entonces la expresión

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n$$

es válida en $D(z_0, r)$, con $r = \text{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0$ y luego $f|_{D(z_0, r)} \equiv 0$. Como $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es conexo y $X \neq \Omega$ es abierto y cerrado, concluimos que $X = \emptyset$. Para concluir, sea $z_0 \in V(f) \subseteq \Omega$, i.e., $f(z_0) = 0$. Como $X = \emptyset$, existe $m \geq 1$ tal que $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, que podemos asumir minimal. Entonces

$$f(z) = \sum_{n \geq m} a_n (z - z_0)^n := (z - z_0)^m g(z)$$

en $D(z_0, r)$. Por construcción

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)^m}$$

en $\Omega \setminus \{z_0\}$, entonces $g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Finalmente, como $g(z_0) = a_m \stackrel{\text{def}}{=} f^{(m)}(z_0)/m! \neq 0$, la continuidad de g implica que g no se anula en una vecindad abierta $V \subseteq \Omega$ de z_0 . Entonces, $f^{-1}(0) \cap V = \{z_0\}$, i.e., $z_0 \in V(f)$ es un punto aislado. \square

La demostración del resultado anterior nos da información más precisa:

Proposición 1.17.4. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo no vacío y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ una función holomorfa no idénticamente nula. Entonces, para todo $z_0 \in \Omega$ tal que $f(z_0) = 0$:

(1) Existe un único entero $m \geq 1$ minimal tal que $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, i.e.,

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$$

y $f^{(m)} \neq 0$.

(2) f se factoriza como

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

con $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ que no se anula en una vecindad abierta de z_0 .

Decimos que f posee un **cero de orden** m en z_0 .

Ejercicio 1.17.5. — Determinar el orden de todos los ceros de las funciones

- (1) $\sin(z)$ y $\cos(z)$.
- (2) $\text{Ln}(z)$.

1.18. Extensión analítica

En esta sección analizaremos la extensión de funciones holomorfas.

Teorema 1.18.1. — (Principio de extensión analítica). Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no vacío, y sean $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Sea $A \subseteq \Omega$ un subconjunto tal que existe $z_0 \in A$ punto de acumulación de A . Entonces, si $f = g$ en A , se tiene que $f = g$ en la componente conexa que contiene a z_0 .

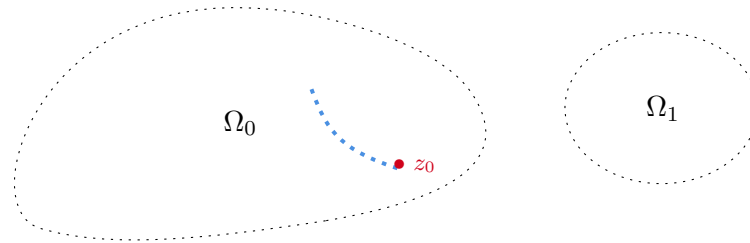


IMAGEN 31. Principio de extensión analítica.

Demostración. — Sea Ω_0 la componente conexa de Ω conteniendo a z_0 . Si consideramos $h := f - g$, entonces $h \in \mathcal{O}(\Omega_0)$ y z_0 es un cero no aislado de h , entonces $h \equiv 0$ en Ω_0 . \square

Una forma útil de reformular lo anterior es la siguiente.

Proposición 1.18.2. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es un abierto conexo no vacío y $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Si existe $\{z_n\}_{n \geq 0} \subseteq \Omega$ sucesión de elementos diferentes tales que $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} w \in \Omega$ y tal que $f(z_n) = g(z_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f = g$.

En particular, si $f = g$ en \mathbb{R} , entonces $f = g$ en \mathbb{C} .

Ejemplo 1.18.3. — Las identidades trigonométricas que se verifican en todo \mathbb{R} se extienden analíticamente a todo \mathbb{C} . Por ejemplo,

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \quad \text{y} \quad \cos^2(z) = \frac{1 + \cos(2z)}{2} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

¡Atención! — No es cierto que $|\cos(z)|^2 + |\sin(z)|^2 = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$ (a pesar de ser cierto en \mathbb{R}) pues $f(z) = |\cos(z)|^2 + |\sin(z)|^2$ no es holomorfa!

Corolario 1.18.4. — (Unicidad de la extensión analítica). Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no vacío, y sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ holomorfa. Supongamos que f admite una extensión $F \in \mathcal{O}(\tilde{\Omega})$ a un abierto conexo $\tilde{\Omega}$ tal que $\Omega \subseteq \tilde{\Omega}$. Entonces, F es única.

Demostración. — Sean F_1 y F_2 dos extensiones analíticas de f a $\tilde{\Omega}$. Entonces, $F_1 - F_2$ se anula en Ω , que no es un subconjunto localmente finito de $\tilde{\Omega}$. Luego, $F_1 - F_2 \equiv 0$ en el abierto conexo $\tilde{\Omega}$. □

Ejercicio 1.18.5. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto conexo no vacío, y sean $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Supongamos que existen sucesiones $\{z_n\}_{n \geq 0}, \{w_n\}_{n \geq 0} \subseteq \Omega$ de elementos diferentes y convergentes en Ω tales que $(f - g)(z_n) = 0$ y $(f + 2g)(w_n) = 0$. Probar que $f \equiv g \equiv 0$ en Ω .

1.19. Teorema de la aplicación abierta

El objetivo de esta sección es estudiar el comportamiento local de las funciones holomorfas (tanto en puntos “regulares” como en puntos “críticos”) y deducir el Teorema de la aplicación abierta y el Teorema de Inversión global.

Definición 1.19.1. — Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ dos abiertos no vacíos, y sea $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$. Decimos que f es un **biholomorfismo** si $f \in \mathcal{O}(\Omega_1)$, f es biyectiva, y $f^{-1} \in \mathcal{O}(\Omega_2)$ (i.e., f es una función biyectiva, holomorfa y con inversa holomorfa).

Teorema 1.19.2. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no vacío y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Sea $z_0 \in \Omega$ tal que $f'(z_0) \neq 0$. Entonces existe una vecindad abierta V de z_0 tal que $W := f(V)$ es un abierto de \mathbb{C} y tal que $f : V \rightarrow W$ es un biholomorfismo.

Demostración. — Dado que $f'(z_0) \neq 0$, la \mathbb{R} -diferenciabilidad de f en z_0 y la fórmula $df_{z_0}(h) = f'(z_0)h$ implican que df_{z_0} es un \mathbb{R} -isomorfismo. Luego, el Teorema de la función inversa (en \mathbb{R}) implica que existe una vecindad V de z_0 tal que $W := f(V)$ es una vecindad abierta de $f(z_0)$ y $f : V \rightarrow W$ es un difeomorfismo de clase \mathcal{C}^∞ . Más aún, para todo $z \in V$, $d(f^{-1})_{f(z)} = (df_z)^{-1}$.

Finalmente, dado que f es holomorfa tenemos que df_z es \mathbb{C} -lineal, luego $d(f^{-1})_{f(z)}$ es \mathbb{C} -lineal y por tanto f^{-1} es holomorfa. □

Observación importante 1.19.3. — La demostración anterior prueba más aún que:

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)} \quad \forall z \in V \quad \text{i.e.,} \quad (f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \quad \forall w \in W$$

Cultura general 1.19.4. — Existen versiones más precisas del resultado anterior:

Teorema 1.19.5. — (*Teorema de Bloch-Landau*) Sea f holomorfa en $D(z_0, r)$ con $f'(z_0) \neq 0$. Entonces existe $U \subseteq D(z_0, r)$ abierto tal que $f(U) = D(w_0, R)$ con $R \geq (1/12)r|f'(z_0)|$ y con $f|_U : U \xrightarrow{\sim} D(z_0, r)$ biholomorfismo.

Este resultado fue enunciado por André Bloch en 1924 (desde un hospital psiquiátrico al sur de París, donde estaba internado luego de haber matado a su hermano y sus tíos en una comida familiar en 1917...) y probado en 1929 por Edmund Landau.

Definición 1.19.6. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no vacío y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Decimos que $z_0 \in \Omega$ es un **punto crítico** (respectivamente **punto regular**) si $f'(z_0) = 0$ (respectivamente $f'(z_0) \neq 0$).

Ejercicio 1.19.7. — Sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ función no constante. Probar que el conjunto de puntos críticos de f (respectivamente regulares) es un conjunto cerrado formado por puntos aislados en Ω (respectivamente es un abierto denso de Ω).

El Teorema de Inversión local nos permitió entender el comportamiento de f en una vecindad de un punto regular. Para puntos críticos tenemos:

Teorema 1.19.8. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no vacío, $z_0 \in \Omega$ y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ no constante en una vecindad de z_0 . Entonces existe $m := \min\{n \in \mathbb{N}^{\geq 1} \text{ tal que } f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$ y un biholomorfismo $\varphi : V \rightarrow W$ de una vecindad abierta $z_0 \in V$ a una vecindad abierta $0 \in W$ tal que $\varphi(z_0) = 0$ y tal que

$$f(z) - f(z_0) = \varphi(z)^m \quad \forall z \in V$$

Demostración. — Dado que f no es constante en una vecindad de z_0 , el conjunto $\{n \in \mathbb{N}^{\geq 1} \text{ tal que } f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$ es no vacío y luego posee un mínimo $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

El caso $m = 1$ se obtiene del Teorema de Inversión local, definiendo en tal caso $\varphi(z) := f(z) - f(z_0)$.

Supongamos que $m \geq 2$. En este caso, podemos escribir

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^m g(z) \iff f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^m g(z)$$

con $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ y $g(z_0) \neq 0$. Como $g(z_0) \neq 0$, podemos escoger una rama de \log_θ para definir $z \mapsto \sqrt[m]{z}$ en una vecindad de $g(z)$, y obtener así $h \in \mathcal{O}(W_0)$ para una vecindad abierta $z_0 \in W_0$ y tal que $g = h^m$ en W . Definamos $\varphi(z) := (z - z_0)^m h(z)$, que verifica $\varphi(z_0) \stackrel{\text{def}}{=} 0$ y

$$\varphi(z)^m = (z - z_0)^m h(z)^m \stackrel{\text{def}}{=} (z - z_0)^m g(z) \stackrel{\text{def}}{=} f(z) - f(z_0)$$

el Teorema de Inversión local implica que φ es un biholomorfismo de una vecindad abierta $V \subseteq W_0$ de z_0 en una vecindad abierta de $\varphi(z_0) = 0 \in W$. \square

Ejercicio 1.19.9. — Analizar $f(z) = \sin^3(z^2)$ en $z_0 = 0$.

Observación 1.19.10. — En el Teorema anterior, siempre podemos suponer que W es un disco: en caso contrario, elegimos un disco $D(0, r_0) \subseteq W_0$ y reemplazamos W por $W_r := D(0, r)$ con $r \in]0, r_0[$, y V por $V_r := \varphi^{-1}(D(0, r))$.

Corolario 1.19.11. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no vacío, $z_0 \in \Omega$ y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ no constante en una vecindad de z_0 . Si $m := \min\{n \in \mathbb{N} \text{ tal que } f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$, entonces

- (1) Para todo $w \in D(f(z_0), r^m) \setminus \{f(z_0)\}$ con $r \in]0, r_0[$, la ecuación $f(z) = w$ posee m soluciones diferentes en V_r .
- (2) Si $w = f(z_0)$, la ecuación $f(z) = w$ admite $z = z_0$ como única solución (de multiplicidad m).

Demostración. — Para $w \in D(f(z_0), r^m)$, la ecuación $f(z) = w$ equivale a $\varphi(z)^m = w - f(z_0)$ en $D(0, r^m)$, y luego posee m soluciones:

$$z_k = \varphi^{-1}(e^{2\pi ik/m}(w - f(z_0))^{1/m}) \in V_r \quad \text{con } k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$$

donde $(w - f(z_0))^{1/m} \in D(0, r)$ es cualquiera de las raíces m -ésimas de $w - f(z_0)$. En el caso:

- (1) Todas las soluciones z_0, \dots, z_{m-1} son distintas pues $w \neq f(z_0)$.
- (2) Todas las soluciones son iguales a $\varphi^{-1}(0) = z_0$ pues $w = f(z_0)$ y φ es un biholomorfismo.

□

Una consecuencia importante del análisis local de funciones holomorfas y de la observación anterior es:

Teorema 1.19.12. — (*Teorema de la aplicación abierta*) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo no vacío y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ función holomorfa no constante. Entonces, f es una función **abierta**, i.e., para todo abierto $U \subseteq \Omega$, la imagen $f(U)$ es un abierto de \mathbb{C} .

Demostración. — Todo punto $z_0 \in U$ (regular o crítico) posee una vecindad abierta $V_{z_0} \subseteq U$ tal que $f(V_{z_0}) = D(f(z_0), r(z_0))$ es un disco abierto de centro $f(z_0)$ y radio $r_0 = r(z_0) > 0$. Entonces

$$f(U) = \bigcup_{z_0 \in U} D(f(z_0), r(z_0))$$

es un abierto.

□

Observación 1.19.13. — Lo anterior es falso para funciones reales (e.g. considerar $\sin(x)$).

La principal aplicación del Teorema de la aplicación abierta es:

Teorema 1.19.14. — (*Teorema de Inversión Global*) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo no vacío y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ una función holomorfa inyectiva. Entonces:

- (1) $f(\Omega)$ es un abierto de \mathbb{C} .
- (2) $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$.
- (3) $f : \Omega \xrightarrow{\sim} f(\Omega)$ es un biholomorfismo.

Demostración. — Como f es una función abierta, $f(\Omega) \subseteq \mathbb{C}$ es un disco abierto. Así, $f : \Omega \rightarrow f(\Omega)$ es una biyección continua abierta (i.e. un homeomorfismo). Si se tuviera que $f'(z_0) = 0$ para cierto $z_0 \in \Omega$, entonces

$$m = \min\{n \in \mathbb{N}^{\geq 1} \text{ tal que } f^{(n)}(z_0) \neq 0\} \geq 2$$

y luego f no sería localmente inyectiva en una vecindad de z_0 . Por tanto, $f'(z_0) \neq 0$ para todo $z_0 \in \Omega$ y luego el Teorema de inversión local implica que f^{-1} es holomorfa. □

Ejercicio 1.19.15. — Dar un contraejemplo de lo anterior en el caso de funciones reales.

1.20. Principio del máximo y Lema de Schwarz

El principio del máximo es otra manifestación espectacular de la “rigidez” de las funciones holomorfas.

Teorema 1.20.1. — (*Principio del máximo*) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no vacío y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Entonces

- (1) Si existe $z_0 \in \Omega$ tal que $|f(z_0)| = \sup_{\Omega} |f|$, entonces f es constante en la componente conexa de Ω que contiene a z_0 .
- (2) Para todo compacto $K \subseteq \Omega$ se tiene que

$$\max_K |f| = \max_{\partial K} |f|$$

y además:

$$\max_K \operatorname{Re}(f) = \max_{\partial K} \operatorname{Re}(f) \quad \text{y} \quad \max_K \operatorname{Im}(f) = \max_{\partial K} \operatorname{Im}(f)$$

Demostración. — Para (1), supongamos f no constante en la componente conexa Ω_0 de Ω que contiene a z_0 y que

$$f(z_0) = \sup_{\Omega} |f| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\Omega_0} |f|$$

Como f es abierta en Ω_0 , la imagen $f(\Omega_0)$ es una vecindad abierta de z_0 y luego existe $r_0 \in \mathbb{R}^{>0}$ tal que $D(f(z_0), r_0) \subseteq f(\Omega_0)$. Entonces, existe $w = f(z) \in D(f(z_0), r_0)$ tal que $z \in \Omega_0$ y además

$$w \neq f(z_0) \quad \text{y} \quad \text{además} \quad |f(z_0)| < |w| \stackrel{\text{def}}{=} |f(z)|$$

una contradicción.

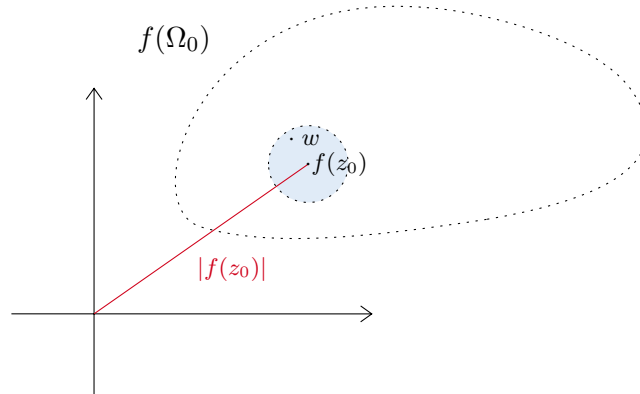


IMAGEN 32. La imagen $f(\Omega_0)$.

Veamos (2). Para $u := \text{Re}(f)$ (la parte imaginaria es análoga). Si tuvieramos que

$$\max_{\partial K} u < \max_K u$$

entonces existe $z_0 \in \text{int}(K) \stackrel{\text{def}}{=} K \setminus \partial K$ tal que $u(z_0) = \max_K u$. Consideremos la componente conexa Ω_0 de z_0 en el abierto $\text{int}(K)$ y veamos que f es constante en Ω_0 (por tanto u también). En caso contrario, $f(\Omega_0)$ sería una vecindad abierta $f(z_0)$ contenida en $\{w \in \mathbb{C} \text{ tal que } \text{Re}(w) \leq \text{Re}(f(z_0)) \stackrel{\text{def}}{=} u(z_0)\}$ lo cual es imposible.

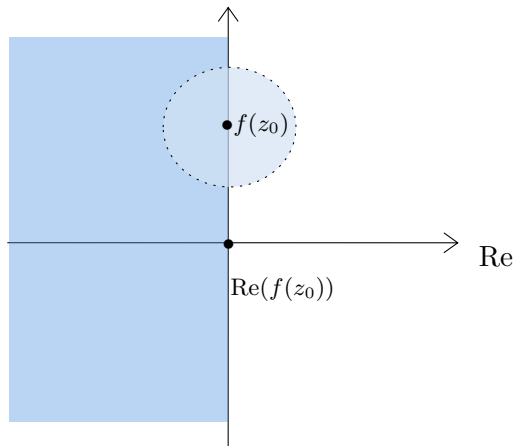


IMAGEN 33. Vecindad abierta de $f(z_0)$.

Así, f es constante en Ω_0 y luego $u|_{\partial\Omega_0} = u(z_0)$ por continuidad de $f = u + iv$. Finalmente, dado que

$$\emptyset \neq \partial\Omega_0 \subseteq \partial(\text{int}(K)) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\text{int}(K)} \setminus \text{int}(K) \subseteq \overline{K} \setminus \text{int}(K) \stackrel{\text{def}}{=} \partial K$$

tendríamos que $\max_K u = u(z_0)$ se alcanza también en ∂K . □

Ejercicio 1.20.2. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no vacío y sea $f \in \mathcal{O}^*(\Omega)$ (i.e., $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$). Probar que si $|f|$ alcanza su mínimo en Ω , entonces f es constante.

Una aplicación del Principio del máximo es el “Lema de Schwarz”, que nos da información cuantitativa sobre el módulo de una función holomorfa de la cual conocemos cotas globales y existencia de ciertos ceros.

Teorema 1.20.3. — (Lema de Schwarz) Sea $f \in \mathcal{O}(D(z_0, R))$ para $R \in]0, +\infty[$ y $z_0 \in \mathbb{C}$. Si $\sup_{D(z_0, R)} |f| < +\infty$ y $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$, entonces

(1) Para todo $z \in D(z_0, R)$

$$|f(z)| \leq M \left(\frac{|z - z_0|}{R} \right)^m$$

(2) Si existe $z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ tal que (1) es una igualdad, entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = M$ y tal que

$$f(z) = \lambda \left(\frac{z - z_0}{R} \right)^m$$

para todo $z \in D(z_0, R)$.

Demostración. — Definamos $g(z) = f(z)/(z - z_0)^m$. Dado que f posee un cero de orden $n \geq m$ en z_0 , existe $h \in \mathcal{O}(\Omega)$, $h(z) \neq 0$, y tal que $f(z) = (z - z_0)^n h(z)$ con $n \geq m$, entonces existe g holomorfa en $D(z_0, r)$ para todo $r < R$. Al aplicar el principio del máximo a g en $\overline{D}(z_0, r)$ tenemos que

$$\max_{\overline{D}(z_0, r)} |g| = \max_{\Gamma(z_0, r)} |g| \leq \frac{M}{r^m}$$

Haciendo $r \rightarrow R$, tenemos que

$$\sup_{D(z_0, R)} |g| \leq \frac{M}{R^m}$$

y luego obtenemos (1). Si hay igualdad en (1), entonces g alcanza su supremo en un punto de $D(z_0, r)$ y luego $g(z) \equiv \mu := \lambda/R^m$ es constante, de donde concluimos (2). □

Ejercicio 1.20.4. — Sea $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z| < 1\}$ y $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ holomorfa tal que $f(0) = 0$. Probar que $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathcal{D}$ y que $|f'(0)| \leq 1$.

Ejemplo importante 1.20.5. — (Automorfismos del disco unitario \mathbb{D}). Para todo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no vacío, definimos

$$\text{Aut}(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \Omega \text{ biholomorfismo}\} = \{f : \Omega \rightarrow \Omega \text{ holomorfa y biyectiva}\}$$

Veamos que si $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ entonces:

$$f(z) = \lambda \left(\frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right)$$

con $|\lambda| = 1$ y $a \in \mathcal{D}$.

Ejercicio 1.20.6. — Verificar que $a = f^{-1}(0)$ y

$$\lambda = \frac{f'(0)}{1 - |a|^2}$$

Comencemos por convencernos que dichas f son automorfismos de \mathbb{D} . Si $\lambda = 1$ y definimos

$$\varphi_a(z) := \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

para $z \in \mathbb{D}$, entonces $|1 - \bar{a}z| \geq 1 - |a| \cdot |z| > 0$ pues $a \in \mathbb{D}$ y además:

$$1 - |\varphi_a(z)|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2} \quad (\text{ejercicio})$$

Entonces $\varphi_a(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Además, para $w \in \mathbb{D}$ tenemos que $w = \varphi_a(z)$ si y solo si $w(1 - \bar{a}z) = z - a$ si y solo si $w + a = z(1 + \bar{a}w)$, lo que por definición es equivalente a que $z = \varphi_{-a}(w)$. Así, $\varphi_a^{-1} = \varphi_{-a}$ y luego $\varphi_a \in \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Ejercicio 1.20.7. — Probar que $\text{Aut}(\mathbb{D})$ **actúa transitivamente** en \mathbb{D} , i.e., para todos $a, b \in \mathbb{D}$, existe $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ tal que $f(a) = b$.

Indicación: Considerar $f = \varphi_{-b} \circ \varphi_a$.

En el caso general en que $|\lambda| = 1$, i.e., $\lambda = e^{i\theta}$ para $\theta \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, $h_\lambda(z) = \lambda z = e^{i\theta}z$ es la rotación en ángulo θ y luego $h_\lambda \in \text{Aut}(\mathbb{D})$. Así,

$$f(z) = h_\lambda \circ \varphi_a(z) = \lambda \left(\frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right) \in \text{Aut}(\mathbb{D})$$

Recíprocamente, si $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ y escribimos $a := f^{-1}(0) \in \mathbb{D}$, entonces

$$g := f \circ \varphi_a^{-1} = f \circ \varphi_{-a} \in \text{Aut}(\mathbb{D})$$

y $g(0) = f(a) = 0$. Por el Lema de Schwarz, $|g(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Reemplazando g por $g^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ obtenemos $|g^{-1}(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y por tanto

$$|z| = |g^{-1}(g(z))| \leq |g(z)| \implies |g(z)| = |z| \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

y luego el Lema de Schwarz implica

$$g(z) = h_\lambda(z) = \lambda z$$

para algún $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$. Finalmente

$$f = g \circ \varphi_a = h_\lambda \circ \varphi_a$$

y luego f es de la forma deseada.

Corolario 1.20.8. — *Sea $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ una función holomorfa arbitraria. Entonces, se verifica la desigualdad*

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. La igualdad se alcanza si y solo si $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Demostración. — Si, tal como en el ejemplo anterior, consideramos

$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \implies \varphi'_a(z) = \frac{1 - |a|^2}{(1 - \bar{a}z)^2}$$

y luego $\varphi'_a(0) = 1 - |a|^2$ y $\varphi'_a(a) = 1/(1 - |a|^2)$. Si fijamos $z_0 \in \mathbb{D}$ y consideramos $g := \varphi_{f(z_0)} \circ f \circ \varphi_{-z_0}$, que cumple $g(0) = 0$ por construcción y además $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, por el Lema de Schwarz, $|g(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y $|g'(0)| \leq 1$. Dado que

$$g'(0) = \varphi'_{f(z_0)}(f(z_0)) \cdot f'(z_0) \cdot \varphi'_{-z_0}(0) = \frac{1}{1 - |f(z_0)|^2} \cdot f'(z_0)(1 - |z_0|^2)$$

y luego $|g'(0)| \leq 1$ equivale a la desigualdad deseada. Si la igualdad $|g'(0)| = 1$, que equivale a

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{g(z)}{z} \right| = 1$$

se verifica, entonces $g(z)/z \equiv \lambda$ es constante, con $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| = 1$. Entonces, $g(z) = \lambda z$ es un automorfismo de \mathbb{D} y por tanto f también lo es. \square

Ejercicio 1.20.9. — Sea $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \text{Im}(z) > 0\}$ (semiplano de Poincaré). Probar que $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$, dado por

$$f(z) = i \left(\frac{1-z}{1+z} \right)$$

está bien definida y es un biholomorfismo.

1.21. Espacios de Fréchet y convergencia de funciones holomorfas

Sea $k = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} y $\Omega \subseteq k$ no vacío. Recordemos que una sucesión $\{f_n : \Omega \rightarrow k\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones a valores en k **converge uniforme** a $f : \Omega \rightarrow k$ si para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ y todo $x \in \Omega$, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

No es difícil probar (usando la desigualdad triangular) que límite uniforme de funciones continuas es continua. Sin embargo, la sucesión de funciones analíticas reales

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{n} \sin(nx)$$

converge uniforme a $f \equiv 0$, pero $f'_n(x) = \cos(nx)$ no converge.

En esta sección, veremos que las funciones holomorfas se comportan mucho mejor al considerar la convergencia uniforme sobre compactos de \mathbb{C} , lo cual nos servirá también como excusa para introducir algunas nociones que son utilizadas en Análisis Funcional.

Definición 1.21.1. — Sea $k = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} , y V un k -espacio vectorial. Decimos que una función $p : V \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ es una **seminorma** si:

- (1) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ para todo $\lambda \in k$ y todo $x \in V$.
- (2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para todos $x, y \in V$.

Ejemplo importante 1.21.2. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no vacío y $V := \mathcal{C}^0(\Omega)$ espacio vectorial de funciones continuas $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ a valores complejos. Para todo compacto no vacío $K \subseteq \Omega$, definimos la seminorma

$$p_K : \mathcal{C}^0(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}, f \mapsto p_K(f) := \sup_K |f|$$

Así, obtenemos una familia de seminormas $\{p_K\}_{K \subseteq \Omega}$ indexada por todos los compactos $K \subseteq \Omega$. En particular, $f \equiv 0$ si y solo si $p_K(f) = 0$ para todo $K \subseteq \Omega$.

Recuerdo 1.21.3. — Si X es un conjunto (no vacío), una **topología** en X es una colección $\mathcal{T} = \{U_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de X tales que

- (1) $\emptyset \in \mathcal{T}$ y $X \in \mathcal{T}$.
- (2) Si $U, V \in \mathcal{T}$, entonces $U \cap V \in \mathcal{T}$.
- (3) Si $\{U_j\}_{j \in J} \subseteq \mathcal{T}$, entonces $\bigcup_{j \in J} U_j \in \mathcal{T}$.

Los elementos de \mathcal{T} son llamados **abiertos** de X , y sus complementos **cerrados**. Una función $f : X \rightarrow Y$ entre dos espacios topológicos es **continua** si para todo $V \subseteq Y$ abierto, la preimagen $f^{-1}(V) \subseteq X$ es abierto.

Observación 1.21.4. — Esto generaliza en gran medida la discusión en §1.3 y §1.4.

Ejemplo 1.21.5. —

- (1) En $X = \mathbb{R}$, los abiertos son la unión (arbitraria) de intervalos abiertos.
- (2) En $X = \mathbb{C}$, los abiertos son la unión (arbitraria) de discos abiertos.
- (3) En $X \times Y$ la **topología producto** se obtiene al declarar abiertos los conjuntos de la forma $U \times V$, con $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ abiertos, y sus uniones arbitrarias.

Definición 1.21.6. — Sea $k = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} , y V un k -espacio vectorial. Decimos que V es un **espacio vectorial topológico** si:

- (1) V es un espacio topológico.
- (2) La suma $+: V \times V \rightarrow V$, $(x, y) \mapsto x + y$ es continua.
- (3) La multiplicación por escalares $\times : k \times V \rightarrow V$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ es continua.

Observación 1.21.7. — Dado que la suma es continua, si $x \in V$ y $U \subseteq V$ es un abierto tal que $x \in U$, entonces existe U_0 abierto tal que $0 \in U_0$ y

$$U = x + U_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{x + y \text{ tal que } y \in U_0\}$$

Es decir, basta entender las vecindades del $0 \in V$.

Ejemplo importante 1.21.8. — Sea $V := \mathcal{C}^0(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ continua}\}$, junto con la familia de seminormas $\{p_K\}_{K \subseteq \Omega}$ (con $p_K(f) = \sup_K |f|$). Dotamos V de una estructura de espacio vectorial topológico declarando que las vecindades de $0 \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ son los conjuntos

$$U_{K, \epsilon} := \{f \in \mathcal{C}^0(\Omega) \text{ tal que } p_K(f) < \epsilon\}$$

con $\epsilon > 0$ y $K \subseteq \Omega$ compacto, (y sus uniones arbitrarias). Así, decimos que $U \subseteq \mathcal{C}^0(\Omega)$ es abierto si para todo $f \in U$ existe un $U_{K, \epsilon}$ tal que $f + U_{K, \epsilon} \subseteq U$.

Observación 1.21.9. — La topología anterior definida en $\mathcal{C}^0(\Omega)$ se conoce como la **topología de la convergencia uniforme sobre compactos** de Ω . Así, una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}^0(\Omega)$ converge a $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ si y solo si $f_n \rightarrow f$ uniformemente sobre todo compacto $K \subseteq \Omega$, i.e., si y solo si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_K(f_n - f) = 0$$

para todo $K \subseteq \Omega$ compacto.

Observación importante 1.21.10. —

- (1) La discusión anterior para $\mathcal{C}^0(\Omega)$ se generaliza literalmente al caso de funciones holomorfas $\mathcal{O}(\Omega) \subseteq \mathcal{C}^0(\Omega)$. Así, $(\mathcal{O}(\Omega), \{p_K\}_{K \subseteq \Omega})$ es un subespacio vectorial topológico de $\mathcal{C}^0(\Omega)$.
- (2) Los espacios vectoriales topológicos $\mathcal{C}^0(\Omega)$ y $\mathcal{O}(\Omega)$ son **localmente conexos** (i.e., su topología puede definirse a partir de una familia, a priori arbitraria, de seminormas).
- (3) Mejor aún, $\mathcal{C}^0(\Omega)$ y $\mathcal{O}(\Omega)$ son espacios vectoriales topológicos cuya topología está definida a partir de una familia **numerable** de seminormas. Basta escribir $\Omega = \bigcup_{n \geq 0} K_n$ con $K_n \subseteq \text{int}(K_{n+1})$ compactos, y considerar $\{p_{K_n}\}_{n \geq 0}$ familia numerable de seminormas.
- (4) Como consecuencia de (3), $\mathcal{C}^0(\Omega)$ y $\mathcal{O}(\Omega)$ son **metrizables**, i.e., su topología se define a partir de una métrica $d(x, y)$. Explícitamente:

$$d(x, y) := \sum_{n \geq 0} \frac{\min\{1, p_{K_n}(x - y)\}}{2^n} \quad \forall x, y \in V$$

donde $V = \mathcal{O}(\Omega)$ o $V = \mathcal{C}^0(\Omega)$.

Definición 1.21.11. — Sea V un espacio vectorial topológico. Entonces:

- (1) Una **sucesión de Cauchy** en V es una sucesión $\{x_n\}_{n \geq n_0} \subseteq V$ tal que para toda vecindad U de $0 \in V$, existe $N \in \mathbb{N}^{\geq n_0}$ tal que $x_n - x_m \in U$ para todos $n, m \geq N$.
- (2) Decimos que V es **completo** si es metrizable y toda sucesión de Cauchy en V converge.
- (3) Un **espacio de Fréchet** es un espacio vectorial topológico localmente convexo, metrizable y completo.

Ejemplo 1.21.12. —

- (1) Todo subespacio vectorial topológicos cerrado de un espacio de Fréchet es un espacio de Fréchet.

- (2) Dado que \mathbb{C} es completo, toda sucesión de Cauchy $\{f_n\}_{n \geq n_0}$ en $(\mathcal{C}^0(\Omega), \{P_{K_n}\}_{n \geq 0})$ converge a una función $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, i.e., $(\mathcal{C}^0(\Omega), \{P_{K_n}\}_{n \geq 0})$ es un espacio de Fréchet.

Veamos ahora el caso de funciones holomorfas. En particular, el resultado siguiente justifica que la topología de la convergencia uniforme sobre compactos es la “buena” topología en nuestro contexto:

Teorema 1.21.13. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no vacío, y sea $\{f_n\}_{n \geq n_0}$ una sucesión en $\mathcal{O}(\Omega)$. Supongamos que f_n converge a $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uniformemente en todo compacto $K \subseteq \Omega$. Entonces

- (1) $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.
- (2) Para todo $m \geq 0$, la sucesión de derivadas $\{f_n^{(m)}\}_{n \geq n_0}$ converge a $f^{(m)}$ uniformemente sobre todo compacto $K \subseteq \Omega$.

Demostración. — Como f es límite uniforme de funciones continuas, $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$. Sea $K \subseteq \Omega$ compacto con borde de clase \mathcal{C}^1 por pedazos, entonces para todo $z \in \text{int}(K)$

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f_n(w)}{w-z} dw \quad (\text{Cauchy})$$

Dado que f_n converge uniformemente a f en el compacto ∂K , y dado que $|w-z| \geq \delta := d(z, \mathbb{C} \setminus K) > 0$, tomando el límite obtenemos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \forall z \in \text{int}(K)$$

y por tanto $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ (c.f. §1.14). Para ver (2), fijemos $r > 0$ tal que $r < \delta_K$, con δ_K suficientemente pequeño. Entonces, para todo $z \in \text{int}(K)$ tenemos

$$f_n^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{\Gamma(z,r)} \frac{f_n(w)}{(w-z)^{m+1}} dw \quad \text{y} \quad f^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{\Gamma(z,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{m+1}} dw$$

luego, por la desigualdad de Cauchy

$$|f_n^{(m)}(z) - f^{(m)}(z)| \leq \frac{m!}{r^m} \sup_{\Gamma(z,r)} |f_n - f|$$

Sea $K_r := \{z \in \Omega \text{ tal que } d(z, K) \leq r\}$ compacto contenido en Ω (pues $r < \delta_K \stackrel{\text{def}}{=} d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega)$), entonces

$$\sup_K |f_n^{(m)}(z) - f^{(m)}(z)| \leq \frac{m!}{r^m} \sup_{K_r} |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

□

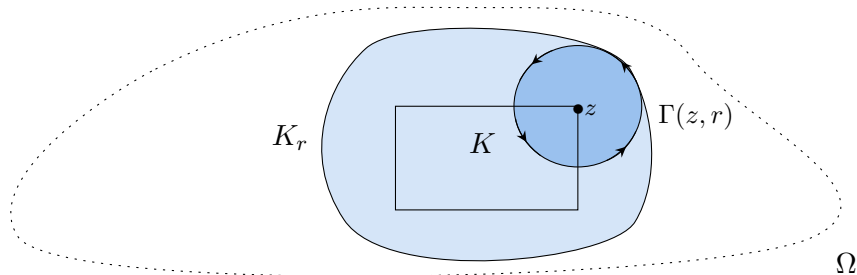


IMAGEN 34. El compacto K_r .

Corolario 1.21.14. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no vacío. Entonces, el espacio vectorial $\mathcal{O}(\Omega)$ es un subespacio vectorial cerrado del espacio de Fréchet $(\mathcal{C}^0(\Omega), \{p_K\}_{K \subseteq \Omega})$. En particular, $(\mathcal{O}(\Omega), \{p_K\}_{K \subseteq \Omega})$ es un espacio de Fréchet.

Demostración. — Simplemente una reformulación del resultado anterior. □

Ejercicio 1.21.15. — Sea $\sum f_n$ una serie de funciones holomorfas, con $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$. Si $\sum f_n$ converge uniformemente en todo compacto $K \subseteq \Omega$ a $F = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, probar que:

- (1) $F \in \mathcal{O}(\Omega)$.
- (2) Para todo $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $F^{(m)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(m)}$.

1.22. Derivación bajo el signo integral y Función Γ de Euler

En esta sección estudiaremos funciones holomorfas definidas a partir de integrales, siendo el caso más emblemáticos la función Γ de Euler.

Teorema 1.22.1. — Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, y $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no vacío. Sea

$$F : \Omega \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, (z, t) \mapsto F(z, t)$$

tal que

- (1) $F(z, t_0)$ es holomorfa para todo $t_0 \in [a, b]$ fijo.
- (2) F es continua en $\Omega \times [a, b]$.

Entonces, la función

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto f(z) := \int_a^b F(z, t) dt$$

es holomorfa en Ω , y para todo $m \geq 0$ se tiene que

$$f^{(m)}(z) = \int_a^b \frac{\partial^m}{\partial z^m} F(z, t) dt$$

para todo $z \in \Omega$.

Demostración. — Un cambio de variable lineal nos permite asumir $a = 0$ y $b = 1$. Veamos que f es el límite uniforme de sumas de Riemann. Para cada $n \geq 1$, consideremos la suma de Riemann

$$f_n(z) := \sum_{j=1}^n F(z, t_j) \Delta t_j := \sum_{j=1}^n F\left(z, \frac{j}{n}\right) \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n F\left(z, \frac{j}{n}\right)$$

Notemos que $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$. Veamos que $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge uniformemente a f en todo compacto $K \subseteq \Omega$, para esto, recordemos que una función continua en un compacto es uniformemente continua (Teorema de Heine-Cantor): Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\sup_K |F(z, t_1) - F(z, t_2)| < \epsilon$ siempre que $|t_1 - t_2| < \delta$. Así, si $n > 1/\delta$ y $z \in K$, tenemos que

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f(z)| &\stackrel{\text{def}}{=} \left| \sum_{j=1}^n \int_{(j-1)/n}^{j/n} F\left(z, \frac{j}{n}\right) - F(z, t) dt \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \int_{(j-1)/n}^{j/n} \left| F\left(z, \frac{j}{n}\right) - F(z, t) \right| dt \\ &< \sum_{j=1}^n \frac{\epsilon}{n} = \epsilon \end{aligned}$$

Así, $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ en todo compacto $K \subseteq \Omega$, de donde deducimos que $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y la fórmula para $f^{(m)}$ (c.f. ejercicio 1.21.15). □

Observación 1.22.2. — Utilizando herramientas de Teoría de la Medida e Integración, se pueden dar pruebas alternativas y versiones mejoradas del resultado anterior.

Veamos una aplicación importante de lo anterior a la función Γ de Euler.

Definición 1.22.3. — La **función** Γ de Euler está definida mediante la fórmula

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

donde $t^{z-1} \stackrel{\text{def}}{=} \exp((z-1) \ln(t))$.

Proposición 1.22.4. — La función Γ es holomorfa en el abierto $\{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

Demostración. — Notar que si $z = x \in \mathbb{R}$ es real, entonces $\Gamma(x)$ converge para todo $x > 0$. En efecto,

$$\left| \int_{\epsilon}^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \right| \leq C \int_{\epsilon}^{+\infty} t^{x-1} dt = C\epsilon^x/x < +\infty$$

cerca de $t = 0$. Sea $z \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}(z) := x > 0$, y consideremos $a := x/2$ y $b := 2x$. Consideremos

$$\Omega_{a,b} := \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } a < \operatorname{Re}(z) < b\}$$

y veamos que Γ es holomorfa en $\Omega_{a,b}$.

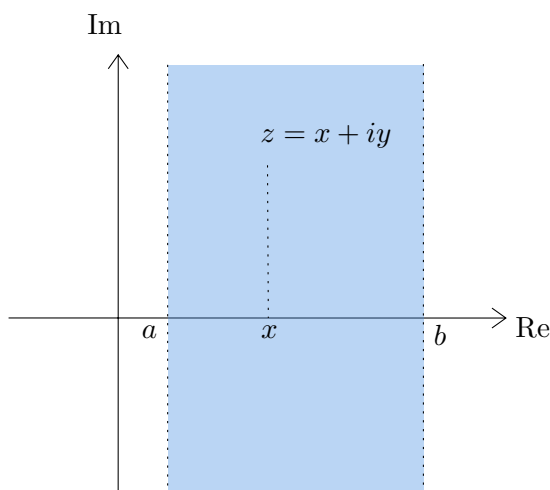


IMAGEN 35. El abierto $\Omega_{a,b}$.

Para ello, consideremos $\epsilon_n := 1/n \in]0, 1[$ ($n \geq 2$) y definimos

$$f_n(z) := \int_{\epsilon_n}^{1/\epsilon_n} e^{-t} t^{z-1} dt \stackrel{\text{def}}{=} \int_{1/n}^n t^{z-1} e^{-t} dt$$

Dado que $F(z, t) := t^{z-1} e^{-t}$ es continua en $\Omega_{a,b} \times [1/n, n]$ y $F(z, t_0) \in \mathcal{O}(\Omega_{a,b})$ para todo $t_0 \in [1/n, n]$ fijo, el Teorema anterior asegura que $f_n \in \mathcal{O}(\Omega_{a,b})$ para

todo n . Veamos que $f_n \xrightarrow{\text{unif}} \Gamma$ en $\overline{\Omega_{a,b}}$ cuando $n \rightarrow +\infty$. Para esto

$$\begin{aligned} |\Gamma(z) - f_n(z)| &\leq \left| \int_0^{\epsilon_n} t^{z-1} e^{-t} dt \right| + \left| \int_{\epsilon_n^{-1}}^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \right| \\ &\leq \int_0^{\epsilon_n} |t^{z-1}| e^{-t} dt + \int_{\epsilon_n^{-1}}^{+\infty} |t^{z-1}| e^{-t} dt \\ &= \int_0^{\epsilon_n} |t^{x-1}| e^{-t} dt + \int_{\epsilon_n^{-1}}^{+\infty} |t^{x-1}| e^{-t} dt \\ &\leq C \frac{\epsilon_n^x}{x} + 2C' e^{-1/2\epsilon_n} \\ &\leq C \frac{\epsilon_n^a}{a} + 2C' e^{-1/2\epsilon_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Luego Γ es holomorfa en $\Omega_{a,b}$, al ser límite uniforme de funciones holomorfas, luego Γ es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \text{Re}(z) > 0\}$. □

Lema 1.22.5. — Para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(z) > 0$ se tiene que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

En particular $\Gamma(n+1) = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. — Integrando por partes, tenemos que

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0^+ \\ R \rightarrow +\infty}} \int_{\epsilon}^R t^z e^{-t} dt \\ &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0^+ \\ R \rightarrow +\infty}} \left([t^z (-e^{-t})]_{t=\epsilon}^{t=+\infty} + \int_{\epsilon}^R z t^{z-1} e^{-t} dt \right) \\ &= z\Gamma(z) \end{aligned}$$

Además, $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_{t=0}^{t=+\infty} = 1 = 0!$ y luego se deduce que $\Gamma(n+1) = n!$ por inducción. □

Proposición 1.22.6. — La función Γ de Euler admite una extensión analítica a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^{\leq 0}$, que seguiremos denotando Γ .

Demostración. — Si $z \in \mathbb{C}$ verifica $\text{Re}(z) > -(n+1)$ para $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\tilde{\Gamma}(z) := \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1) \cdot (z+n-1)(z+n)} \quad \text{para } z \notin \mathbb{Z}^{\leq 0}$$

Dicha función es holomorfa y verifica $\tilde{\Gamma}(z) = \Gamma(z)$ si $\operatorname{Re}(z) > 0$ gracias al lema anterior.

□

Observación 1.22.7. — La fórmula anterior, y el hecho que $\Gamma(1) = 1$ implica que $\lim_{z \rightarrow -\infty} |\Gamma(z)| = +\infty$. En particular, no podemos extender Γ a $\mathbb{Z}^{\leq 0}$.

Ejercicio 1.22.8. — Calcular para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z)$.

Para concluir, estudiemos una variante importante de la función Γ , la **función beta** (nombrada y estudiada por Euler y Legendre, en honor a Jacques Binet).

Definición 1.22.9. — Sean $x, y \in \mathbb{R}^{>0}$. La **función beta** es la función en 2 variables

$$B(x, y) := \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

En particular, $B(x, y) = B(y, x)$.

Ejercicio 1.22.10. — Probar, usando que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, que para todos $x, y \in \mathbb{R}^{>0}$

- (1) $B(x, y) = B(x+1, y) + B(x, y+1)$.
- (2) $B(x, y+1) = \frac{y}{x}B(x+1, y) = \frac{y}{x+y}B(x, y)$.

Proposición 1.22.11. — Para todos $x, y \in \mathbb{R}^{>0}$, tenemos

$$B(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt$$

Demostración. — Tenemos que

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \right) \left(\int_0^{+\infty} s^{y-1} e^{-s} ds \right) \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^{x-1} s^{y-1} e^{-(t+s)} dt ds \end{aligned}$$

Para calcular $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-(s+t)} dt$ consideramos $t = su$ ($dt = sdu$), luego

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-(t+s)} dt = s^x \int_0^{+\infty} e^{-(u+1)s} u^{x-1} du$$

Notando que para todo $\lambda > 0$ tenemos que

$$\int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-\lambda t} dt = \frac{\Gamma(z)}{\lambda^z}$$

$$\begin{aligned} \implies \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-(t+s)} \right) s^{y-1} ds &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(u+1)s} s^{x+y-1} \right) u^{x-1} du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\Gamma(x+y)}{(u+1)^{x+y}} u^{x-1} du \end{aligned}$$

Finalmente,

$$B(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}$$

□

Ejercicio 1.22.12. — Probar que para todo $x, y \in \mathbb{R}^{>0}$ se tiene

$$(1) \quad B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}(\theta) \sin^{2y-1}(\theta) d\theta.$$

$$(2) \quad B(x, y) = \int_0^1 w^{x-1} (1-w)^{y-1} dw.$$

Ejemplo 1.22.13. — Sea

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Por otro lado,

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(1/2)^2}{\Gamma(1)} = \Gamma(1/2)^2$$

Finalmente,

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2 \cdot (1/2) - 1}(\theta) \sin^{2 \cdot (1/2) - 1}(\theta) d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} d\theta = \pi$$

Luego, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ y así $I = \sqrt{\pi}/2$.

Ejercicio 1.22.14. — Calcular las siguientes integrales:

$$(1) \quad \int_0^{2\pi} \sin^4(\theta) d\theta.$$

$$(2) \quad \int_1^3 (x-1)^{10} (x-3)^3 dx.$$

Observación 1.22.15. — Las funciones Γ y β son muy usadas en Probabilidad y Estadística!

1.23. Productos infinitos de funciones holomorfas

Definición 1.23.1. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no vacío y $\{f_n\}_{n \geq 0} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$ sucesión de funciones holomorfas en Ω . Denotamos por $u_m = \prod_{n=0}^m f_n = f_0 \cdots f_m$ a la sucesión de **productos parciales**.

Decimos que el producto infinito $\prod f_n$ **converge** (respectivamente **converge uniformemente**) si la sucesión $\{u_n\}_{n \geq 0}$ converge (respectivamente converge uniformemente), y denotamos el límite por

$$P(z) = \prod_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$$

Observación 1.23.2. — Si existe $C \in \mathbb{R}^{>0}$ con $C > 1$ tal que $|f_n(z)| < C$ para todo $z \in \Omega$ y para todo $n \geq n_0$, entonces $\prod f_n \xrightarrow{\text{unif}} 0$ (pues $C^n \rightarrow 0$). De manera similar, si $C > 1$ entonces $\prod f_n$ no converge si $|f_n(z)| > C$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Convención: Consideraremos productos infinitos donde $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ uniformemente en todo compacto $K \subseteq \Omega$. En particular, la rama del logaritmo $\ln(f_n)$ está bien definida en K para todo $n \geq n_0(K)$. Así, omitiendo finitos términos, tenemos que

$$\prod f_n \text{ converge en } \Omega \iff \sum \ln(f_n) \text{ converge en } \Omega$$

Teorema 1.23.3. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto conexo no vacío, y $\prod f_n$ producto de funciones holomorfas en Ω con $f_n \neq 0$ en Ω . Sea $f_n := 1 + g_n$. Si:

- (1) $\sum |g_n|$ converge uniformemente en todo $K \subseteq \Omega$ compacto, o bien
- (2) $\sum g_n$ y $\sum |g_n|^2$ convergen uniforme en todo $K \subseteq \Omega$ compacto

Entonces

$$\prod f_n \rightarrow P := \prod_{n=0}^{+\infty} f_n$$

uniformemente en todo $K \subseteq \Omega$ compacto, donde $P \in \mathcal{O}(\Omega)$, $P \neq 0$, y además,

$$\frac{P'}{P} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_n'}{f_n} \text{ en } \Omega \setminus \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} f_n^{-1}(0) \right)$$

donde esta última serie converge uniformemente en todo $K \subseteq \Omega$ compacto (omitiendo los finitos términos que se anulan en K si fuese necesario).

Demostración. — Sea $K \subseteq \Omega$ compacto. Tanto (1) como en (2), existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene $\sup_K |g_n| \leq 1/2$. Luego, $f_n = 1 + g_n$ no se anula en K para todo $n \geq n_0$

$$\implies \ln(f_n) = \ln(1 + g_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{g_n^k}{k}$$

(1) Sea $C \in \mathbb{R}^{>0}$ tal que para todo $w \in \mathbb{C}$ con $|w| \leq 1/2$ se tenga que $|\ln(1 + w)| \leq C|w|$. Luego, para $p, q \geq n_0$ se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$:

$$\left| \sum_{n=p}^q \ln(f_n) \right| = \left| \sum_{n=p}^q \ln(1 + g_n) \right| \leq C \sum_{n=p}^q |g_n| < \epsilon \quad \forall p, q \geq N$$

Luego $v_n := \sum_{k=n_0}^n f_k \stackrel{\text{def}}{=} \exp(v_n)$ converge uniformemente en K a $v = \sum_{k=n_0}^{+\infty} \ln(f_k) \in \mathcal{O}(\Omega)$. Luego, $u_n = \prod_{k=n_0}^n f_k \stackrel{\text{def}}{=} \exp(v_n)$ converge uniformemente a la función holomorfa $\exp(v)$, i.e., $\prod f_n$ converge uniformemente a la función holomorfa $P := \left(\prod_{k=0}^{n_0-1} f_k \right) \cdot \exp(v)$ en todo compacto de Ω .

(2) Sea $C' \in \mathbb{R}^{>0}$ tal que para todo $w \in \mathbb{C}$ con $|w| \leq 1/2$ se tenga que $|\ln(1 + w) - w| \leq C'|w|^2$. Luego, para $p, q \geq n_0$ se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$:

$$\left| \sum_{n=p}^q \ln(f_n) - \sum_{n=p}^q g_n \right| = \left| \sum_{n=p}^q (\ln(1 + g_n) - g_n) \right| \leq C' \sum_{n=p}^q |g_n|^2 < \epsilon \quad \forall p, q \geq N$$

Luego $v_n = \sum_{k=p}^n \ln(f_k)$ converge uniformemente en K a $v = \sum_{k=n_0}^{+\infty} \ln(f_k) \in \mathcal{O}(K)$, y tal como antes deducimos que $\prod f_n \xrightarrow{\text{unif}} P = \left(\prod_{k=0}^{n_0-1} f_k \right) \exp(v)$ en todo compacto $K \subseteq \Omega$.

En ambos casos, si $P = \left(\prod_{k=0}^{n_0-1} f_k \right) \exp(v)$, la derivada logarítmica de P se define mediante P'/P , donde

$$\begin{aligned} \frac{P'}{P} &= \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{f'_k}{f_k} + v' \text{ con } v' \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=n_0}^{+\infty} (\ln(f_k))' = \sum_{k=n_0}^{+\infty} \frac{f'_k}{f_k} \\ &\implies \frac{P'}{P} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f'_k}{f_k} \end{aligned}$$

□

Como consecuencia de la demostración anterior tenemos que:

Corolario 1.23.4. — Con las hipótesis anteriores, el conjunto de ceros del producto infinito $P(z) = \prod_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ está dado por $\bigcup_{n \geq 0} f_n^{-1}(0)$. En particular, $P \equiv 0$ en Ω si y solo si alguno de sus factores f_n es nulo en Ω .

Ejercicio 1.23.5. — Considere el producto infinito $P(z) := \prod_{n=0}^{+\infty} (1 + z^n)$.

- (1) Determinar su radio de convergencia $R \in [0, +\infty]$.
- (2) Probar que $P(z) = \frac{1}{1-z}$ para todo $z \in D(0, R)$.

Ejemplo importante 1.23.6. — (Euler, 1735) Veamos que para todo $z \in \mathbb{C}$

$$\sin(z) = z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

Sea $P(z) = z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) = z \prod_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$, con $f_n(z) = 1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}$ y con $g_n(z) := -\frac{z^2}{n^2\pi^2}$. Dado que $\sum |g_n|$ converge uniformemente en todo $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto, tenemos que $P \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ es una función entera. Además, los ceros de P están dados por

$$V(P) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } P(z) = 0\} = \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$$

y son todos de multiplicidad 1.

$$\implies g(z) := \frac{P'(z)}{\sin(z)} \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C})$$

función entera sin ceros. Más aún, el Teorema anterior implica que para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$:

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)} = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{n^2\pi^2 - z^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right)$$

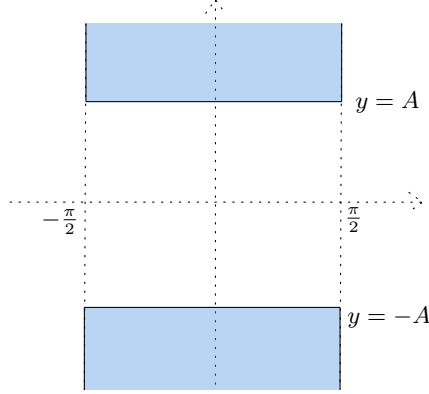
i.e., $P'/P = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$ con $S_N(z) = \sum_{n=-N}^N \frac{1}{z - n\pi}$ (función impar!). En particular, P'/P es una función π -periódica y luego:

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{P''(z)}{P'(z)} - \frac{\cos(z)}{\sin(z)} = \frac{P''(z)}{P'(z)} - \cot(z)$$

con $\cot(z)$ entera y π -periódica. Veamos que g es constante: Consideremos el cerrado $\Omega_A \subseteq \mathbb{C}$, con $A \in \mathbb{R}^{>0}$ fija, dada por:

$$\Omega_A := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : |x| \leq \pi/2, |y| \geq A\}$$

Ejercicio 1.23.7. — Probar que para todo $z = x + iy \in \Omega_A$ se tiene:

IMAGEN 36. El cerrado Ω_A .

(1)

$$|\cot(z)|^2 \leq \coth^2(y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\cosh(y)}{\sinh(y)}$$

y luego $|\cot(z)| \leq C_1 := \coth(A)$.

(2)

$$\left| \frac{1}{z} \right| \leq \frac{1}{A} \quad \text{y} \quad \left| \frac{2z}{n^2\pi^2 - z^2} \right| \leq \frac{8|z|}{n^2\pi^2}$$

Así, existen $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{>0}$ tal que $|g'(z)/g(z)| \leq C_1 + C_2|z|$ para todo $z \in \Omega_A$. Dado que $g'(z)/g(z)$ es entera, y

$$\{z = x + iy \in \mathbb{C} : |x| \leq \pi/2, |y| \leq A\}$$

compacto, podemos asumir (modificando C_1, C_2 si fuese necesario) que:

$$\left| \frac{g'(z)}{g(z)} \right| \leq C_1 + C_2|z| \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \quad \text{con } |\operatorname{Re}(z)| \leq \frac{\pi}{2}$$

Dado que $g'(z)/g(z)$ es π -periódica,

$$\left| \frac{g'(z)}{g(z)} \right| \leq C_1 + C_2|z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Luego, la desigualdad de Cauchy (ver §1.15) implica que $g'(z)/g(z)$ es un polinomio de grado ≤ 1 , π -periódica (y por tanto constante), impar! i.e., $g'(z) \equiv 0$ en \mathbb{C} , luego $g(z)$ es una función constante. Dado que

$$\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\prod_{n=1}^{+\infty} f_n(z) \right) / (\sin(z)/z) = 1, \quad g(z) \equiv 1 \text{ en } \mathbb{C}$$

Así, deducimos que

$$\sin(z) = z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Más aún, la derivada logarítmica de lo anterior implica:

$$\cot(z) = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{n^2\pi^2 - z^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi}\right) \quad z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$$

Derivando esto último, obtenemos que:

$$\frac{1}{\sin^2(z)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$$

Consecuencia (Solución al Problema de Basilea): Sea

$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

La última identidad de Euler, evaluada en $z = \pi/2$, implica que

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\pi/2 - n\pi)^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\pi^2/4)(2n-1)^2} \\ &= \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \\ &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \\ &\implies \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} S &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{4}S + \frac{\pi^2}{8} \\ &\implies S = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

Cultura general 1.23.8. — En general, se puede probar que para todo $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$:

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1} (2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}$$

donde

$$\zeta(z) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}$$

es la **función zeta de Riemann** y donde los $B_{2n} \in \mathbb{Q}$ son los números de Bernoulli. Los valores de $\zeta(2n+1)$ son mucho más misteriosos!

Ejercicio 1.23.9. — (1) Probar que

$$\sinh(2z) = \pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z^2}{n^2}\right)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

(2) Deducir que

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi}$$

Ejercicio 1.23.10. — Probar la **fórmula de Wallis**

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdots \frac{2m \cdot 2m}{(2m-1)(2m+1)} \cdots$$

Observación 1.23.11. — Esto permite calcular

$$\text{vol}_{\mathbb{R}^m}(\mathbb{B}^m) = \begin{cases} \frac{\pi^n}{n!} & \text{si } m = 2n, \\ \frac{2^{n+1} \pi^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} & \text{si } m = 2n+1 \end{cases}$$

donde $\mathbb{B}^m = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\|_{\text{eucl}} \leq 1\}$.

CAPÍTULO 2

FUNCIONES MEROMORFAS Y RESIDUOS

En general, es un problema difícil entender el comportamiento de una función holomorfa cerca el borde de su dominio. Sin embargo, si nos restringimos a ciertos puntos del borde que sean **aislados**, es posible extender muchos resultados de la Parte I del curso.

2.1. Series de Laurent

Definición 2.1.1. — Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y sean $R_1, R_2 \in [0, +\infty]$ tales que $R_1 < R_2$. Definimos el **anillo abierto** de centro z_0 , de radio interior R_1 y de radio exterior R_2 mediante:

$$A(z_0; R_1, R_2) := \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$$

Del mismo modo, el **anillo cerrado** se define mediante

$$\bar{A}(z_0; R_1, R_2) := \{z \in \mathbb{C} : R_1 \leq |z - z_0| \leq R_2\}$$

Notación. $\mathbb{D}^* := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\} \stackrel{\text{def}}{=} A(0; 0, 1)$ es el “disco perforado”.

Definición 2.1.2. — Una **serie de Laurent** (centrada en $z_0 = 0$) es una serie de la forma

$$S(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$$

donde $a_n \in \mathbb{C}$ y donde $z \in \mathbb{C}^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Observación 2.1.3. — Podemos escribir una serie de Laurent como suma de dos series de potencias al escribir $m = -n$ y $w = 1/z$ si $n < 0$:

$$S(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n + \sum_{m \geq 1} a_{-m} w^m$$

Por definición, decimos que la serie de Laurent $S(z)$ **converge** si las dos series de potencias anteriores convergen.

Explícitamente, si $R \in [0, +\infty]$ es el radio de convergencia de la serie $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ y $R' \in [0, +\infty]$ es el radio de convergencia de $\sum_{m \geq 1} a_{-m} w^m$, entonces

$$S(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n \quad \text{converge para todo } z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \frac{1}{R'} < |z| < R$$

i.e., $S(z)$ converge en el anillo $A(0; 1/R', 1/R)$ (el cual es vacío si $1/R' \geq R$, i.e., $R' \leq 1/R$).

Más aún, la teoría de series de potencias (ver §1.6) implica que $S(z)$ converge uniformemente en todo anillo compacto $\bar{A}(0; r_1, r_2) \subseteq A(0; 1/R', R)$. Además, dado que

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in \mathcal{O}(D(0, R)) \quad \text{y} \quad G(w) = \sum_{m \geq 1} a_{-m} w^m \in \mathcal{O}(D(0, R'))$$

tenemos que $S(z)$ es holomorfa en $A(0; 1/R', R)$ y se calcula que

$$S'(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n a_n z^{n-1}$$

con convergencia uniforme en todo anillo compacto $\bar{A}(0; r_1, r_2) \subseteq A(0; 1/R', R)$.

Teorema 2.1.4. — *Sea f una función holomorfa en el anillo abierto $A(z_0; R_1, R_2) \subseteq \mathbb{C}$ con $0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty$. Entonces, f admite un desarrollo en serie de Laurent (centrada en z_0) de la forma*

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$$

con convergencia normal en todo compacto $K \subseteq A(z_0; R_1, R_2)$. Más aún, para todo $r \in]R_1, R_2[$ y todo $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) e^{-int} dt$$

Demostración. — Reemplazando z por $z - z_0$, podemos asumir $z_0 = 0$. Consideremos un anillo compacto $K = \bar{A}(0; r_1, r_2) \subseteq A(0; R_1, R_2)$ con $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$. Aquí, $\partial K = \Gamma^-(0, r_1) \cup \Gamma(0, r_2)$ donde

- $\Gamma^-(0, r_1)$ tiene orientación horaria (i.e., negativa), y donde
- $\Gamma(0, r_2)$: tiene orientación anti-horaria (i.e., positiva).

Luego, la fórmula de Cauchy implica que para todo $z \in A(0; r_1, r_2)$ se tiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(0, r_1)} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(0, r_2)} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

Si $w \in \Gamma(0, r_2)$, entonces $|z| < r_2 = |w|$ (i.e., $|z/w| < 1$) y luego

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{(1-z/w)} = \frac{1}{w} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{w^{n+1}}$$

De manera similar, si $w \in \Gamma(0, r_1)$ entonces $|z| > r_1 = |w|$ (i.e., $|w/z| < 1$) y así

$$\frac{1}{w-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{(1-w/z)} = -\frac{1}{z} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{w}{z}\right)^m = -\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{w^m}{z^{m+1}}$$

Así, tenemos que

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(0, r_2)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \right) z^n + \sum_{m \geq 0} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(0, r_1)} f(w) w^m dw \right) z^{-m-1}$$

Si escribimos $n := -m-1 \leq -1$ (i.e., $m := -n-1$), entonces $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ con:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(0, r_2)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \text{ si } n \geq 0, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(0, r_1)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \text{ si } n \leq -1$$

Veamos que la integral $\int_{\Gamma(0, r)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw$ no depende de $r \in]R_1, R_2[$:

La fórmula de Cauchy aplicada a la función holomorfa $g(w) = f(w)/w^{n+1}$ y el compacto $K = \bar{A}(0; r_1, r_2) \subseteq A(0; R_1, R_2)$ implica que

$$0 = \int_{\partial K} g(w) dw \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Gamma(0, r_2)} g(w) dw - \int_{\Gamma(0, r_1)} g(w) dw$$

para todos $r_1 < r_2$ en el intervalo $]R_1, R_2[$. □

Ejemplo 2.1.5. — La función $f(z) = \exp(1/z)$ es holomorfa en \mathbb{C}^* . Además, su serie de Laurent (centrada en $z_0 = 0$) está dada por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$$

En particular, la "parte negativa" es infinita.

2.2. Singularidades aisladas y Teorema de Casorati-Weierstrass

Definición 2.2.1. — Sea Ω una vecindad abierta de un punto $z_0 \in \Omega$, y sea $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$. Decimos que z_0 es:

- (1) Una **singularidad removible (o reparable) de f** si f posee una extensión holomorfa $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\Omega)$ (i.e., $f(z) = \tilde{f}(z)$ para todo $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$).
- (2) Una **singularidad no removible de f** (o simplemente una singularidad) si f no puede ser extendida a $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Proposición 2.2.2. — Una función $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$ posee una singularidad removible en z_0 si y solo si los coeficientes a_n de su serie de Laurent centrada en z_0

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$$

verifican que $a_n = 0$ para todo $n < 0$.

Demostración. — Podemos suponer que $\Omega = D(z_0, \varepsilon)$ es un disco pequeño, y así

$$\Omega \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$$

es un disco perforado. Luego, f posee un desarrollo en serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$$

con radio de convergencia $R \geq \varepsilon$ para la parte positiva $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ y con radio de convergencia $R' = +\infty$ para la parte negativa $\sum_{m \geq 1} a_{-m} w^m$. Si f puede extenderse en una función holomorfa \tilde{f} en el disco $D(z_0, \varepsilon)$, obtenemos un desarrollo en serie de potencias

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n \geq 0} b_n (z - z_0)^n \quad \text{en } D(z_0, \varepsilon)$$

La unicidad de los coeficientes de la serie de Laurent implica entonces que $a_n = b_n$ para todo $n \geq 0$ y que $a_n = 0$ para todo $n < 0$. \square

Ejercicio 2.2.3. — Determinar si las funciones $f(z) = \sin(z)/z$ y $g(z) = \sin(z)/z^2$ poseen singularidades removibles en $z_0 = 0$.

Corolario 2.2.4. — Una función $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$ posee una singularidad removible en z_0 si y solo si f es **acotada** en una vecindad de z_0 .

Demostración. — Si f se extiende holomórficamente en z_0 , entonces dicha extensión es continua y por ende acotada en una vecindad de z_0 . Recíprocamente,

si $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in D(z_0, \delta)$ entonces escogiendo $r < \delta$ y usando el hecho que el coeficiente a_n de la serie de Laurent de f está dado por

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-nit} dt$$

deducimos que $|a_n| \leq Mr^{-n}$, y luego $a_n = 0$ para todo $n < 0$ al considerar el límite $r \rightarrow 0$. \square

Lo anterior nos permite distinguir en diferentes tipos de singularidades, que están resumidos en la siguiente observación, que a su vez es la definición más importante de la sección.

Observación importante 2.2.5. —

Sea $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$ con serie de $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$. Si z_0 es una **singularidad no-removible** entonces la parte negativa $\sum_{n < 0} a_n (z - z_0)^n$ no es idénticamente nula. Hay dos posibilidades a considerar:

- (1) **Polos:** Si la parte negativa es una suma finita, y denotamos por $m := \max\{|n| \in \mathbb{N}^{>1} \text{ tal que } a_n \neq 0 \text{ con } n < 0\}$ entonces

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{con } a_{-m} \neq 0$$

Decimos entonces que f posee un **polo de orden** m en z_0 , y que

$$\frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0}$$

es la "parte polar" de f . En particular, tenemos que

- a) $a_{-m} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z)$
 b) Existe $C \in \mathbb{R}^{>0}$ tal que

$$|f(z)| \leq \frac{C}{|z - z_0|^m}$$

en una vecindad de z_0 .

- c) $f(z) = g(z)/(z - z_0)^m$ donde

$$\begin{aligned} g(z) &= a_{-m} + a_{1-m}(z - z_0) + \dots + a_n(z - z_0)^{n+m} + \dots \\ &= \sum_{n \geq 0} a_{n-m}(z - z_0)^n \end{aligned}$$

es una función holomorfa en Ω verificando $g(z_0) \stackrel{\text{def}}{=} a_{-m} \neq 0$.

- (2) **Singularidad esencial:** Si la parte negativa $\sum_{n<0} a_n(z-z_0)^n$ es una serie infinita, decimos entonces que f posee una **singularidad esencial** en z_0 . En tal caso, la función

$$g_m(z) := (z-z_0)^m f(z)$$

no es acotada en una vecindad de z_0 para todo $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

En resumen, si Ω es una vecindad abierta de $z_0 \in \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$ entonces se tienen tres posibilidades:

- (1) z_0 es una **singularidad removible** de f ; o bien
- (2) z_0 es un **polo** de orden $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ de f ; o bien
- (3) z_0 es una **singularidad esencial** de f .

Ejemplo 2.2.6. —

- (1) La función $f(z) = \exp(1/z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$ posee una singularidad esencial en $z_0 = 0$.

- (2) La función $f(z) = (z^2 - 2z + 3)/(z - 2)$ verifica que

$$\frac{z^2 - 2z + 3}{z - 2} = \frac{z(z - 2) + 3}{z - 2} = z + \frac{3}{z - 2} = 2 + (z - 2) + \frac{3}{z - 2}$$

y luego f posee un polo de orden 1 en $z_0 = 2$.

- (3) La función

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1 - \cos(z)}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left(1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right) \right) \\ &= \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} + \dots \end{aligned}$$

posee una singularidad removible en $z_0 = 0$.

Terminología. Típicamente, se dice que un polo de orden $m = 1$ (respectivamente $m = 2$, respectivamente $m = 3$, etc.) es un **polo simple** (respectivamente **polo doble**, respectivamente **polo triple**, etc.).

Ejercicio 2.2.7. — Sean $p, q \in \mathbb{C}[z]$ polinomios, donde $q \neq 0$, y sea $f(z) = p(z)/q(z) \in \mathbb{C}(z)$ función racional. Probar (e.g. usando fracciones parciales) que f posee “a lo más polos” como singularidades, i.e., posee singularidades removibles o polos.

El resultado siguiente nos da una dicotomía que nos permite distinguir entre polos y singularidades esenciales.

Teorema 2.2.8. — (Casorati 1868, Weierstrass 1878) Sea $f : \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que z_0 es una singularidad no-removible.

- (1) Si z_0 es un **polo**, entonces $|f(z)| \rightarrow +\infty$ cuando $z \rightarrow z_0$.
 (2) Si z_0 es una **singularidad esencial**, entonces todo punto de \mathbb{C} es un punto de adherencia de $f(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$, i.e., $\overline{f(W \setminus \{z_0\})} = \mathbb{C}$ para toda vecindad abierta W de z_0 .

Demostración. — El punto (1) se obtiene del hecho que $f(z) = g(z)/(z - z_0)^m$ con $m \geq 1$ y $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ con $g(z_0) \neq 0$.

Para (2), suponemos por contradicción que existe un abierto conexo $W \subseteq \Omega$ tal que $z_0 \in W$ y $\overline{f(W \setminus \{z_0\})} \neq \mathbb{C}$. Luego, si $a \in \mathbb{C} \setminus \overline{f(W \setminus \{z_0\})}$ entonces tendríamos que $|f(z) - a| \geq \varepsilon$ para todo $z \in W \setminus \{z_0\}$. Luego

$$g(z) = \frac{1}{(f(z) - a)}$$

cumple que $|g(z)| \leq 1/\varepsilon$ para todo $z \in W \setminus \{z_0\}$ y, al ser acotada, tendríamos que g se extiende en una función holomorfa no nula $\tilde{g} \in \mathcal{O}(W)$.

Como $f(z) = a + 1/g(z)$, se tiene que g posee un cero de cierto orden m en z_0 y entonces f posee un **polo** de orden m en z_0 , i.e., la singularidad de f en z_0 no sería esencial. \square

Cultura general 2.2.9. — El **Gran Teorema de Picard** señala que si $f : \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ posee una singularidad esencial en z_0 , entonces para toda vecindad perforada $W \setminus \{z_0\}$, la función f alcanza infinitas veces (!) todo valor en \mathbb{C} , salvo quizás un punto (cf. $\exp(1/z) \neq z_0 = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$).

2.3. Funciones meromorfas y Teorema de factorización de Weierstrass

Así como las funciones racionales son cocientes de polinomios, las funciones meromorfas serán (localmente) cocientes de funciones holomorfas. Además, para incluir singularidades aisladas en el análisis consideramos el “plano complejo extendido” $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en varias ocasiones.

Definición 2.3.1. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no vacío y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Decimos que f es **meromorfa** en Ω si:

Para todo punto $z_0 \in \Omega$, existe una vecindad abierta conexa V de z_0 y funciones holomorfas $g, h \in \mathcal{O}(V)$, con $h \not\equiv 0$ no idénticamente nula, de tal suerte que $f|_V = g/h$.

Denotamos por $\mathcal{M}(\Omega)$ al conjunto de funciones meromorfas en Ω .

Se tiene la siguiente caracterización de las funciones meromorfas.

Teorema 2.3.2. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no vacío. Una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es meromorfa si y solo si f es holomorfa en el complemento de una sucesión de singularidades no removibles $\{a_n\}$ que es **localmente finita** (i.e., puntos aislados) en Ω y donde cada singularidad $a_n \in \Omega$ es un polo.

Demostración. — Si $f \stackrel{\text{loc}}{=} g/h$ con $g, h \in \mathcal{O}(V)$, entonces el hecho que $h \neq 0$ en V implica que existe $D(z_0, \varepsilon) \subseteq V$ tal que

$$h(z) = (z - z_0)^m u(z)$$

en $D(z_0, \varepsilon)$ con $u \in \mathcal{O}^*(D(z_0, \varepsilon))$. Luego,

$$f(z) = (z - z_0)^{-m} g(z) u(z)^{-1} \quad \text{y donde } g/u \in \mathcal{O}(D(z_0, \varepsilon))$$

y luego z_0 es un polo de orden $\leq m$. Recíprocamente, si f solo posee singularidades aisladas dadas por polos, entonces sabemos (por el desarrollo en serie de Laurent) que $f(z) \stackrel{\text{loc}}{=} g(z)/(z - z_0)^m$ con g holomorfa en una vecindad del polo z_0 , i.e., f es meromorfa. \square

Ejercicio 2.3.3. —

- (1) $\mathcal{O}(\Omega) \subseteq \mathcal{M}(\Omega)$, i.e., toda función holomorfa es meromorfa.
- (2) **Ejercicio.** Sean $P, Q \in \mathbb{C}[z]$ polinomios con $Q \neq 0$, entonces $f(z) = P(z)/Q(z)$ es meromorfa en \mathbb{C} , i.e., $f \in \mathcal{M}(\Omega)$.
- (3) La función $f(z) = 1/\sin(\pi/z)$ es holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus A$, donde $A = \{0\} \cup \{\pm 1/n, n \in \mathbb{N}^{\geq 1}\}$. Además, dado que $g(z) = \sin(\pi/z)$ tiene ceros simples en cada $z_0 = 1/n$ (pues $g'(z) = -(\pi/z^2) \cos(\pi/z)$) tenemos que f posee polos simples en cada $z_0 = 1/n$.

Así, f es meromorfa en \mathbb{C}^* pero no es meromorfa en \mathbb{C} dado que la sucesión de polos $\{\pm 1/n\}_{n \geq 1}$ no es localmente finita en torno a $0 \in \mathbb{C}$.

La noción de "divisor" (introducida por Dedekind y Weber) es muy útil para recopilar los órdenes de ceros y polos de una función meromorfa.

Definición 2.3.4. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no vacío. Un **divisor** en Ω es una función

$$D : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}, p \mapsto D(p) := m_p$$

tal que su **soporte**, definido por

$$\text{supp}(D) := \{z \in \Omega \text{ tal que } D(z) \neq 0\}$$

consiste en una sucesión $\{z_n\} \subseteq \Omega$ de puntos aislados en Ω , donde $D(z_n) := m_n \neq 0$ es la **multiplicidad** del punto z_n en el divisor D . Lo

anterior suele resumirse escribiendo simplemente

$$D = \sum_n m_n [z_n]$$

Si $m_n \geq 0$ para todo n escribimos $D \geq 0$ y decimos que D es un **divisor efectivo**.

Observación 2.3.5. — El conjunto $\text{Div}(\Omega)$ de divisores en Ω posee una estructura de grupo abeliano: La función nula es el neutro $0 \in \text{Div}(\Omega)$, si $D \in \text{Div}(\Omega)$ entonces $-D \in \text{Div}(\Omega)$, si $D, D' \in \text{Div}(\Omega)$, entonces $D + D' \in \text{Div}(\Omega)$.

Definición 2.3.6. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no vacío, y $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ función holomorfa que no es idénticamente nula en ninguna componente conexa de Ω (y en particular, los conjuntos de ceros $V(f) \subseteq \Omega$ y de polos $P(f) \subseteq \Omega$ forman sucesiones de puntos aislados en Ω). Definimos el **divisor asociado a f** mediante

$$\text{div}(f) = \sum_{z \in \Omega} m_z [z]$$

donde $z \in V(f) \cup P(f)$, y donde $m_z > 0$ (respectivamente $m_z < 0$) es el orden del cero (respectivamente -(orden del polo)) si $z \in V(f)$ (respectivamente si $z \in P(f)$). En particular $\text{div}(f) \geq 0$ si y solo si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Ejemplo 2.3.7. —

- (1) Si $f(z) = \exp(z)$, $\text{div}(f) = 0$ (ni ceros ni polos).
- (2) Si $f(z) = (z - 2)(z^2 + 1)^2$, $\text{div}(f) = 1[2] + 3[i] + 3[-i]$.
- (3) Si $f(z) = z/(z - 1)^2$, $\text{div}(f) = 1[0] - 2[1] \stackrel{\text{def}}{=} [0] - 2[1]$.
- (4) Si $f(z) = 1/\sin(\pi/z) \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^*)$, entonces $\text{div}(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} -[1/n]$.

El "Teorema de factorización de Weierstrass" permite hallar funciones holomorfas con (un divisor efectivo de) ceros pre-escritos.

Notación: Para $p \in \mathbb{N}$, definimos el **factor principal de Weierstrass de orden p** como la función $W_0(z) = 1 - z$ si $p = 0$, y como

$$W_p(z)^{(1)} = (1 - z) \exp \left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p} \right)$$

⁽¹⁾o bien $E_p(z)$ "factorelemental" de Weierstrass

si $p \geq 1$. En particular, $z_0 = 1$ es un caso simple de W_p y en $z_0 = 0$ la función $\ln(W_p)$ admite desarrollo en serie de potencias

$$\ln(W_p(z)) = \ln(1-z) + z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p} = - \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$$

con $|z| < 1$. Luego

$$|\ln(W_p(z))| \leq \frac{1}{p+1} \sum_{n=p+1}^{+\infty} |z|^n = \frac{1}{p+1} \frac{|z|^{p+1}}{1-|z|} \quad \text{para } |z| < 1$$

Así, $|\ln(W_p(z))| \leq 2^{-p}$ si $|z| \leq 1/2$.

Teorema 2.3.8. — (Teorema de Factorización de Weierstrass): Para todo divisor efectivo en un abierto no vacío $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, de la forma

$$D = \sum_{z \in \Omega} m_z [z] = \sum_{n \in \mathbb{N}} m_n [z_n] \geq 0$$

existe una función holomorfa $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que $\text{div}(f) = D$, i.e., una función f cuyos ceros son exactamente los puntos $\{z_n\}$ y cada uno con multiplicidad $m_n \geq 0$.

Demostración. — Podemos suponer que $z_n \neq 0$ para todo $n \geq 0$, pues si $z_0 = 0$ basta con multiplicar por z^{m_0} la función construida a partir de los $\{z_n\}_{n \geq 1}$.

Suponemos primero que $\Omega = \mathbb{C}$: En tal caso, el hecho que los $\{z_n\}$ sean puntos aislados se traduce en que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = +\infty$. Definimos

$$f(z) := \prod_{n \in \mathbb{N}} W_{n+m_n} \left(\frac{z}{z_0} \right)^{m_n}$$

Así, la convergencia del producto infinito se reduce a estudiar la convergencia uniforme de la serie

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} m_n |\ln(W_{n+m_n}(z/z_0))|$$

sobre compactos de \mathbb{C} . Para ello, notemos que si $z \in \overline{D}(0, R)$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n| \geq 2R$ para todo $n \geq n_0$ y por ende $|z/z_0| \leq 1/2$ para todo $n \geq n_0$. Luego

$$|\ln(W_{n+m_n}(z/z_0))| \leq 2^{-(n+m_n)} \quad \forall z \in \overline{D}(0, R) \quad \forall n \geq n_0$$

de donde deducimos la convergencia uniforme de $\sum_{n \in \mathbb{N}} m_n |\ln(W_{n+m_n}(z/z_m))|$ en $\overline{D}(0, R)$ y así, la convergencia de $f(z) = \prod_n W_{n+m_n}(z/z_0)^{m_n}$ en todo compacto de $\Omega = \mathbb{C}$. Por construcción $\text{div}(f) = D$.

Supongamos ahora que $\Omega \neq \mathbb{C}$: En tal caso, el hecho que los $\{z_n\}$ sean puntos aislados se traduce en que $\max\{|z_n|, \text{dist}(z_n, \Omega)^{-1}\} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Por conveniencia realizamos una partición $\mathbb{N} = I \cup J$ de los índices de tal suerte que

$$n \in I \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} |z_n| \geq \text{dist}(z_n, \partial\Omega)^{-1} \quad \text{y} \quad n \in J \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} |z_n| < \text{dist}(z_n, \partial\Omega)^{-1}$$

Así, $\lim_{n \in I, n \rightarrow +\infty} |z_n| = +\infty$. Luego, el razonamiento en el caso anterior muestra que

$$g(z) := \prod_{n \in I} W_{n+m_n}(z/z_0)^{m_n}$$

converge en \mathbb{C} y sus ceros están dados por los $\{z_n\}_{n \in I}$ con multiplicidad m_n . Por otra parte, tenemos que $\lim_{n \in J, n \rightarrow +\infty} \text{dist}(z_n, \partial\Omega) = 0$. Para cada $n \in J$, sea $w_n \in \partial\Omega$ tal que $|z_n - w_n| = \text{dist}(z_n, \partial\Omega)$, y definamos

$$h(z) := \prod_{n \in J} W_{n+m_n}((z_n - w_n)/(z - w_n))^{m_n}$$

donde $W_{n+m_n}((z_n - w_n)/(z - w_n))$ se anula en el único punto $z = z_n$ que verifica $(z_n - w_n)/(z - w_n) = 1$. Sea $K \subseteq \Omega$ compacto y sea $\delta := \text{dist}(K, \partial\Omega)$, luego existe n_0 tal que $|z_n - w_n| \stackrel{\text{def}}{=} \text{dist}(z_n, \partial\Omega) \leq \delta/2$ para todo $n \geq n_0$ y por tanto

$$\begin{aligned} \left| \frac{z_n - w_n}{z - w_n} \right| &\leq \frac{\delta/2}{\delta} = \frac{1}{2} \quad \forall z \in K \\ \Rightarrow \left| \ln \left(W_{n+m_n} \left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n} \right) \right) \right| &\leq \frac{1}{2^{n+m_n}} \end{aligned}$$

en K . Luego h converge uniformemente en todo compacto $K \subseteq \Omega$. Así, la función $f := gh \in \mathcal{O}(\Omega)$ verifica $\text{div}(f) = D$. □

Observación 2.3.9. — La elección de índices "n + m_n" asegura la convergencia en general. Sin embargo, si $\{z_n\}_{n \geq 0} \subseteq \mathbb{C}$ son puntos aislados tales que para $p \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\sum_{n \geq 0} \frac{m_n}{|z_n|^{p+1}} < +\infty$$

Luego $f(z) = \prod_n W_p(z/z_n)^{m_n}$ converge uniformemente en todo $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto. En particular, si $\sum m_n/|z_n| < +\infty$ entonces $f(z) = \prod(1 - z/z_0)^{m_n}$ funcional!

Corolario 2.3.10. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío y $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ función meromorfa. Entonces, existe una escritura **global**

$$f = g/h \quad \text{en } \Omega$$

donde $g, h \in \mathcal{O}(\Omega)$, y donde h posee como **ceros** los polos de f y como **multiplicidades** los órdenes de cada polo correspondiente.

Demostración. — Escribamos el divisor $\text{div}(f)$ como

$$\begin{aligned} \text{div}(f) &= \sum_{z_n \in V(f)} m_n[z_n] - \sum_{w_n \in P(f)} d_n[w_n] \\ &=: \text{div}(f)_+ - \text{div}(f)_- \end{aligned}$$

donde $V(f) = \{z_n\}$ es el conjunto de ceros (con $m_n > 0$) y $P(f) = \{w_n\}$ es el conjunto de polos (con $-d_n < 0$, i.e., $d_n > 0$). El Teorema de factorización de Weierstrass nos permite hallar $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que $\text{div}(h) = \text{div}(f)_-$. Luego, $g := fh \in \mathcal{O}(\Omega)$ y $\text{div}(g) = \text{div}(f)_+$. □

Observación 2.3.11. — Notar que si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es un abierto conexo no vacío entonces $\mathcal{O}(\Omega)$ es un **dominio entero** (i.e., $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ son tales que $fg \equiv 0$ en Ω , entonces $f \equiv 0$ o $g \equiv 0$ en Ω). Así, el corolario anterior nos dice que

$$\mathcal{M}(\Omega) \cong k(\Omega)$$

donde $k(\Omega) := \text{Fr}(\mathcal{O}(\Omega))$ es el **cuerpo de fracciones** de $\mathcal{O}(\Omega)$.

Cultura general 2.3.12. — Sea $\rho \in \mathbb{R}^{>0}$. Decimos que $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tiene un **orden de crecimiento** $\leq \rho$ si $|f(z)| \leq A \exp(B|z|^\rho)$ para ciertas constantes $A, B \in \mathbb{R}^{>0}$ y para todo $z \in \mathbb{C}$. El **orden de crecimiento de f** es el ínfimo ρ_0 de dichos ρ .

Teorema 2.3.13. — (*Teorema de Factorización de Hadamard*) Supongamos que $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tiene orden de crecimiento ρ_0 , y sea $\kappa := \lfloor \rho_0 \rfloor$ su parte entera. Si $z_0 = 0$ y $\{z_n\}_{n \geq 1} = \{z_1, z_2, \dots\}$ son los ceros de f , entonces

$$f(z) = e^{P(z)} z^m \prod_{n=1}^{+\infty} W_\kappa(z/z_0)$$

donde $P \in \mathbb{C}[z]$ polinomio de grado $\leq \kappa$ y donde $m = \text{mult}_0(f) \geq 0$.

Ejercicio 2.3.14. — Usar el Teorema de Factorización de Hadamard que:

(1) Para todo $z \in \mathbb{C}$

$$e^{az} - e^{bz} = (a - b)ze^{(a+b)z/2} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{(a-b)^2 z^2}{4n^2 \pi^2}\right)$$

(2) Para todo $z \in \mathbb{C}$

$$\cos(\pi z) = \prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n+1)^2}\right)$$

(3) La ecuación $e^z = z$ tiene infinitas soluciones en \mathbb{C} .

2.4. Teorema de Residuos

Recordemos que si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es una vecindad abierta de z_0 y $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$, entonces f admite un desarrollo en serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n = \cdots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(z_0, \epsilon)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, y donde $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $\overline{D}(z_0, \epsilon) \subseteq \Omega$.

En particular

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(z_0, \epsilon)} f(z) dz$$

Definición 2.4.1. — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ vecindad abierta de $z_0 \in \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$, y consideramos $\omega := f(z)dz$ la 1-forma diferencial asociada. Definimos el **residuo de ω en z_0** mediante

$$\text{Res}(\omega, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(z_0, \epsilon)} \omega$$

donde $\epsilon > 0$ es suficientemente pequeño tal que $\overline{D}(z_0, \epsilon) \subseteq \Omega$.

Observación 2.4.2. — El residuo $\text{Res}(\omega, z_0)$ corresponde al coeficiente a_{-1} de la serie de Laurent de f centrada en z_0 .

Notación. En muchos textos se habla del “residuo de f en z_0 ”, dado por:

$$\text{Res}(f, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(z_0, \epsilon)} f(z) dz$$

y también lo usaremos frecuentemente. Sin embargo, desde un punto de vista técnico, es mejor hablar del residuo de una 1-forma diferencial, pues:

- (1) Se comporta mejor al hacer cambios de variable (“biholomorfismos”).
- (2) Esta definición se extiende mejor a funciones de varias variables complejas (!). El **residuo de Poincaré** asocia una $(n - 1)$ -forma diferencial $\text{Res}(\omega)$ a una n -forma diferencial $\omega = f(z_1, \dots, z_n) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$.

A continuación, ejemplificamos las propiedades más útiles de los residuos.

Ejemplo 2.4.3. — Sea $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$.

- (1) Si f posee una singularidad removible en z_0 , entonces

$$\text{Res}(f, z_0) = 0 \quad (\text{cf. Teorema de Cauchy-Goursat})$$

- (2) Si $f(z) = \exp(1/z) = \sum_{n \geq 0} (1/n!) z^{-n}$, entonces $\text{Res}(f, 0) = 1$.
- (3) Si $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ es meromorfa y $f = u/v$ con $u, v \in \mathcal{O}(\Omega)$ entonces $\text{Res}(f, z_0)$ se calcula mirando (¡finitos términos!) los desarrollos de series de potencias en z_0 de u y v , y con ello se puede deducir los primeros términos de la serie de Laurent de f centrada en z_0 . Por ejemplo:

Supongamos que $f = u/v$ con $u, v \in \mathcal{O}(\Omega)$ y f posee un polo simple en z_0 , i.e., $u(z_0) \neq 0$ y v posee un cero simple en z_0 (i.e., $v(z_0) = 0$ y $v'(z_0) \neq 0$). Así,

$$v(z) = v'(z_0)(z - z_0)h(z)$$

con $h \in \mathcal{O}(\Omega)$, tal que $h(z_0) \neq 0$, luego

$$f(z) = \frac{u(z_0)}{v'(z_0)}(z - z_0)^{-1} + O(1)$$

Por ende,

$$\text{Res}\left(\frac{u(z)}{v(z)}, z_0\right) = \frac{u(z_0)}{v'(z_0)} \quad \text{si } v(z_0) = 0 \text{ y } v'(z_0) \neq 0.$$

El análisis anterior se generaliza a la siguiente fórmula, bastante útil en la práctica.

Ejercicio 2.4.4. — Probar que si f posee un polo de orden $m \geq 1$ en z_0 entonces

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z - z_0)^m f(z) \right) \Big|_{z=z_0}$$

- (4) Para funciones concretas dadas, se sugiere intentar escribirla (localmente) como cociente $f(z) = u(z)/v(z)$ para ciertas funciones holomorfas u, v y estudiar las series de potencias de cada una de ellas, o bien utilizar directamente la fórmula del Ejercicio anterior.

Ejercicio 2.4.5. — Sea $f(z) = \tan(z) \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$. Calcular $\text{Res}(\tan(z), a)$ para todo $a \in \mathbb{C}$.

- (5) No es necesario restringirse a círculos $\Gamma(z_0, \varepsilon)$ para calcular residuos. Sea U vecindad abierta de z_0 tal que $K := \overline{U} \subseteq \Omega$ es compacto con borde ∂K de clase \mathcal{C}^1 por pedazos. Entonces:

$$\text{Res}(\omega, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \omega$$

En efecto, el Teorema de Cauchy aplicado al compacto

$$K_0 := \overline{U} \setminus D(z_0, \varepsilon) \subseteq \Omega \setminus \{z_0\}$$

implica que

$$0 = \int_{\partial K_0} \omega = \int_{\partial K} \omega - \int_{\Gamma(z_0, \varepsilon)} \omega$$

para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño.

La siguiente propiedad de cambio de variable, justifica el hecho de usar formas diferenciales en lugar de funciones al momento de integrar.

Proposición 2.4.6 (Cambio de variable). — . Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ una vecindad abierta de z_0 , $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$ y $\omega = f(z) dz$ la 1-forma diferencial asociada. Supongamos que $z = \varphi(w)$ es un cambio de variable biholomorfo entre una vecindad de $w_0 := \varphi^{-1}(z_0)$ y una vecindad de z_0 , entonces

$$\text{Res}(\varphi^* \omega, w_0) = \text{Res}(\omega, z_0)$$

donde $\varphi^* \omega := f(\varphi(w))\varphi'(w) dw$ es el **pullback de ω por φ** .

Demostración. — Para una vecindad abierta acotada (suficientemente pequeña) W de w_0 tal que ∂W es de clase \mathcal{C}^1 , el abierto imagen $U := \varphi(W)$ es una vecindad de $z_0 = \varphi(w_0)$ tal que ∂U es de clase \mathcal{C}^1 . Así, como $z = \varphi(w)$

$$\text{Res}(\varphi^* \omega, w_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial W} f(\varphi(w))\varphi'(w) dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} f(z) dz \stackrel{\text{def}}{=} \text{Res}(\omega, z_0),$$

donde la orientación de los bordes es preservada dado que $\det(d\varphi_w) > 0$ gracias a las ecuaciones de Cauchy-Riemann reales. \square

Ejemplo 2.4.7. — Sabemos que $\text{Res}(\exp(1/z), 0) = 1$. Luego, si consideramos el cambio de variable (localmente biyectivo) $z = \sin(w)$, luego

$$\text{Res}(\exp(1/\sin(w)), 0) = 1$$

Del mismo modo, $\text{Res}(\exp(1/\sin(w)) \cos(w), n\pi) = 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y como $\cos(n\pi) = (-1)^n$ se tiene que

$$\text{Res}(\exp(1/\sin(w)), n\pi) = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

El teorema principal de esta sección, que es una vasta generalización del Teorema de Cauchy-Goursat y de la Fórmula de Cauchy, es el siguiente:

Teorema 2.4.8 (Teorema de Residuos). — Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no-vacío y $\{a_n\}_{n \geq 0} \subseteq \Omega$ una sucesión de puntos aislados. Supongamos que f es una función holomorfa en $\Omega \setminus \{a_n\}_{n \geq 0}$. Entonces,

Para todo compacto $K \subseteq \Omega$ con borde de clase \mathcal{C}^1 por pedazos tal que $\partial K \cap \{a_n\}_{n \geq 0} = \emptyset$ se tiene

$$\int_{\partial K} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a_n \in K} \text{Res}(f, a_n).$$

Demostración. — La hipótesis del Teorema implican que $K \cap \{a_n\}_{n \geq 0}$ es un conjunto finito de puntos que no pertenecen al borde ∂K . Así, existen radios $r_n > 0$ tal es que $\overline{D}(a_n, r_n) \subseteq \text{int}(K)$. Luego $K_0 = K \setminus \bigcup_{a_n \in K} \overline{D}(a_n, r_n)$ es un compacto con frontera \mathcal{C}^1 por pedazos y f holomorfa en una vecindad de ∂K_0 , luego el Teorema de Cauchy implica que

$$0 = \int_{\partial K_0} f(z) dz = \int_{\partial K} f(z) dz - \sum_{a_n \in K} \int_{\Gamma(a_n, r_n)} f(z) dz$$

de donde se obtiene la fórmula deseada. \square

Ejemplo 2.4.9. —

(1) Sea $f(z) = \exp(1/z^2)$. Entonces f admite el desarrollo en serie de Laurent

$$f(z) = 1 + \frac{1}{1!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^4} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^6} + \cdots \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

Luego, $\text{Res}(\exp(1/z), 0) = 0$. Así, el Teorema de Residuos implica (por ejemplo) que

$$\int_{\partial D(0, r)} e^{1/z^2} dz = 0$$

para todo $r > 0$.

- (2) Sea $f(z) = 1/(z(z-2)^4)$ y sea $\Gamma(0,3)$ el círculo de radio 3 con centro en $z_0 = 0$ (orientado en sentido anti-horario). Luego, el Teorema del Residuo nos dice que

$$\int_{\Gamma(0,3)} f(z)dz = 2\pi i(\text{Res}(f,0) + \text{Res}(f,2))$$

En $z_0 = 2$, escribimos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-2)^4} \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{(z-2)^4} \cdot \frac{1}{2+(z-2)} \\ &= \frac{1}{2(z-2)^4} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{-(z-2)}{2}\right)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-2)^{n-4} \end{aligned}$$

y luego (en $n = 3$) tenemos que $\text{Res}(f,2) = -1/16$.

En $z_0 = 0$, al ser un polo simple

$$\text{Res}(f,0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} zf(z) = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$$

$$\implies \int_{\Gamma(0,3)} f(z)dz = 2\pi i(1/16 - 1/16) = 0$$

De forma similar,

$$\int_{\Gamma(2,1)} f(z)dz = -\frac{\pi}{8}i$$

Ejercicio 2.4.10. — Calcular

$$\int_{\Gamma(0,2)} \frac{5z-2}{z(z-1)} dz$$

2.5. Cálculo de integrales reales mediante residuos

En esta sección explicaremos cómo el Teorema de Residuos puede ser usado para calcular integrales **reales** que involucran funciones holomorfas, que muchas veces no poseen primitivas elementales. Incluso en el caso de que las funciones posean primitivas conocidas, suele pasar que el cálculo de residuos permite obtener resultados mucho más rápidamente.

Ejemplo 2.5.1. — Fracciones racionales en $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

Supongamos que queremos calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

donde $f(x) = P(x)/Q(x)$ es cociente de dos polinomios $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ tales que

- (1) $f(z) = P(z)/Q(z)$ no posee polos en el eje real.
- (2) $d := \text{gr}(Q) - \text{gr}(P) \geq 2$, lo que implica convergencia absoluta.

Para calcular $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$ consideramos el compacto

$$K := \overline{D}(0, R) \cap \{z : \text{Im}(z) \geq 0\},$$

es decir, la semi-circunferencia con bordes $\gamma_1(t) = t$ para $t \in [-R, R]$ y $\gamma_2(t) = Re^{it}$ para $t \in [0, 2\pi]$.

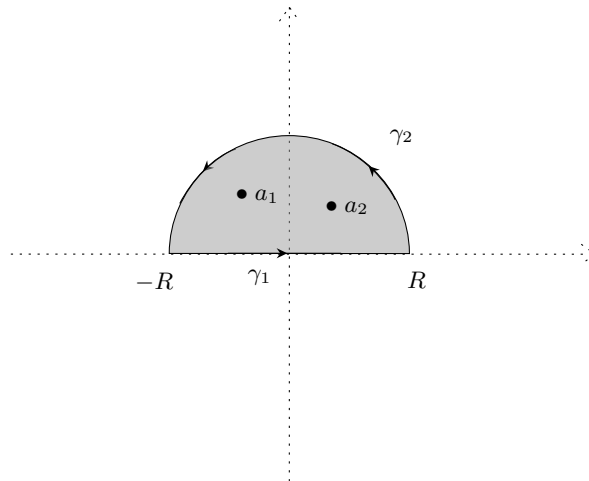


IMAGEN 1. Semi-disco de radio R en el semi-plano superior.

Sea $c \in \mathbb{R}$ el cociente entre el coeficiente principal de P y Q , de tal suerte que $|f(z)| \sim |c| \cdot |z|^{-d}$ cuando $|z| \rightarrow +\infty$. En particular,

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z)dz \right| \leq \ell(\gamma_2)C'R^{-d} = \pi RC'R^{-d} = \frac{C''}{R^{d-1}} \rightarrow 0$$

cuando $R \rightarrow +\infty$.

Por otro lado, el Teorema de Residuos implica que

$$\int_{\partial K} f(z)dz \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz = 2\pi i \sum_{a_n \in K} \text{Res}(f, a_n)$$

donde

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-R}^R f(t) dt$$

Luego, si $R \rightarrow +\infty$ obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}(a_n) > 0} \text{Res} \left(\frac{P}{Q}, a_n \right)$$

Por ejemplo, para calcular

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx$$

debemos determinar los polos de $f(z) = P(z)/Q(z)$, con $P(z) = z^2$ y $Q(z) = z^6 + 1$.

$$\begin{aligned} z^6 + 1 = 1 &\iff z^6 = -1 = e^{i\pi} \iff z = a_n := e^{i\pi/6} e^{2\pi i n/6} \\ &= \exp \left(\frac{i\pi}{6} (2n + 1) \right) \end{aligned}$$

con $n = 0, 1, \dots, 5$. Solamente $a_0 = e^{i\pi/6}$, $a_1 = i$ y $e^{i5\pi/6}$ tienen $\text{Im}(a_n) > 0$. Más aún, dado que $f = P/Q$ posee polos simples, se tiene que

$$\text{Res}(f, a_n) = \frac{P(a_n)}{Q'(a_n)} \quad (\text{ver §2.4 Ejemplo 2.4.3.(3)})$$

En particular,

$$\text{Res}(f, a_n) = \frac{a_n^2}{6a_n^5} = \frac{1}{6a_n^3}$$

y así (dado que $a_0^3 = a_2^3 = i$, $a_1^3 = -i$), concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 2\pi i \left(\frac{1}{6i} - \frac{1}{6i} + \frac{1}{6i} \right) = \frac{\pi}{3}, \text{ i.e., } \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx = \frac{\pi}{6}$$

Cabe destacar que en caso general, podríamos haber considerado el compacto $K := \overline{D}(0, R) \cap \{\text{Im}(z) \leq 0\}$. En tal caso, dado que la orientación del eje real es la opuesta, se deduce que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = -2\pi i \sum_{\text{Im}(a_n) < 0} \text{Res}(f, a_n)$$

Así, dado que $f = P/Q$ no posee polos en el eje real tenemos que

$$\sum_{a \in \mathbb{C}} \text{Res}(f, a) = 0$$

Esto último se extiende a funciones meromorfas más generales mediante:

Definición 2.5.2. — Una **vecindad del infinito** es un anillo abierto de la forma

$$A(0, R, +\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z| > R\}$$

para $R > 0$. Sea $f \in \mathcal{O}(A(0, R, +\infty))$ holomorfa en una vecindad del infinito, y sea $\varphi(z) := 1/z$ biholomorfismo entre $A(0, R, +\infty)$ y $A(0, 0, 1/R)$. Para $\omega = f(z)dz$, se tiene que $\varphi^*\omega \stackrel{\text{def}}{=} -f(1/w)w^{-2}dw$ y definimos

$$\text{Res}(\omega, \infty) := \text{Res}(f, \infty) := \text{Res}(-f(1/w)w^{-2}, 0)$$

i.e., $\text{Res}(f, \infty) = -(\text{coeficiente } a_{-1} \text{ de la serie de Laurent de } f \text{ centrada en } 0)$.

Además, decimos que $z = \infty$ es un **polo de orden** m de f si $w = 0$ es un polo de orden m de $f(1/w)$ (i.e., la serie de Laurent de f centrada en 0 posee finitos coeficientes $a_n \neq 0$ con $n \geq 0$); y en caso contrario decimos que f posee una singularidad esencial en $z = \infty$.

Proposición 2.5.3. — Sea $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ función meromorfa, entonces

$$\sum_{a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}} \text{Res}(f, a) = 0$$

si f posee finitos polos (de tal suerte que la suma es finita).

Demostración. — Consideremos $R \gg 0$ tal que $D(0, R)$ contiene a todos los polos de f , salvo $z = \infty$. Entonces

$$\int_{\Gamma(0, R)} f(z)dz = 2\pi i \sum_{a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}} \text{Res}(f, a)$$

Por otra parte, notando que $w = 1/z$ cambia la orientación de círculos centrados en z_0 (pues envía $\gamma(t) = Re^{it}$ en $\tilde{\gamma}(t) = \frac{1}{R}e^{-it}$), tenemos que

$$\int_{\Gamma(0, R)} f(z)dz = \int_{\Gamma(0, R)} \omega = - \int_{\Gamma(0, 1/R)} \varphi^*\omega \stackrel{\text{def}}{=} -2\pi i \text{Res}(f, \infty)$$

i.e., $\sum_{a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}} \text{Res}(f, a) = 0$. □

Ejemplo 2.5.4. — Fracciones racionales trigonométricas en $[0, 2\pi]$.

Supongamos que queremos calcular

$$\int_0^{2\pi} F(\cos(t), \sin(t))dt$$

donde $F(x, y) \in \mathbb{R}(x, y)$ es una función racional en 2 variables que no se indetermina en el círculo $x^2 + y^2 = 1$ de \mathbb{R}^2 . Si escribimos $z(t) = e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$,

tenemos que $z'(t) = ie^{it}$ y luego si definimos

$$f(z) := F\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{1}{iz} \in \mathbb{C}(z)$$

obtenemos una función racional tal que si $z = e^{it} \in \partial\mathbb{D}$ entonces

$$f(e^{it}) = F(\cos(t), \sin(t)) \frac{1}{ie^{it}}$$

es decir,

$$\int_0^{2\pi} F(\cos(t), \sin(t)) dt \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\partial\mathbb{D}} f(z) dz.$$

En particular, el Teorema de Residuos nos dice que

$$\int_0^{2\pi} F(\cos(t), \sin(t)) dt = 2\pi \sum_{a \in \mathbb{D}} \text{Res}(g(z), a)$$

donde

$$g(z) := \frac{1}{z} F\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \in \mathbb{C}(z)$$

funcional racional. Por ejemplo, para calcular

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos(t)} dt$$

consideramos $F(x, y) = \frac{1}{2+x}$, y luego

$$g(z) = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{2 + \frac{1}{2}(z + 1/z)} \right) = \frac{2}{z^2 + 4z + 1}.$$

Como $z^2 + 4z + 1 = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)$ con $\lambda_1 = -2 - \sqrt{3} \notin \mathbb{D}$, $-2 + \sqrt{3} \in \mathbb{D}$ tenemos que

$$I = 2\pi \text{Res}(g, \lambda_2) = 2\pi \frac{2}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

Ejemplo 2.5.5. — Integrales de Fourier. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Veremos pronto que el Análisis de Fourier requiere calcular **transformadas de Fourier** de la forma siguiente (salvo cambios de signo)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{2\pi i \omega x} dx, \quad \omega \in \mathbb{R} \text{ fijo}$$

y donde podemos asumir que $\omega > 0$, haciendo $u = -x$ si fuera necesario. Dicho signo es importante, pues si $z = x + iy$ entonces $|e^{2\pi i \omega z}| = e^{-2\pi \omega y}$ y por ende usaremos el Teorema de Residuos en el semi-plano superior $\{\text{Im}(z) = y \geq 0\}$.

Proposición 2.5.6. — Supongamos que $\omega > 0$ y f se extiende en una función holomorfa $f(z)$ definida en una vecindad abierta de

$$\overline{\mathbb{H}} := \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \text{Im}(z) \geq 0\},$$

salvo quizás finitos puntos singulares $a_j \notin \mathbb{R}$. Si $\lim_{|z| \rightarrow +\infty, z \in \overline{\mathbb{H}}} f(z) = 0$, entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{2\pi i \omega x} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}(a_j) > 0} \text{Res}(f(z)e^{2\pi i \omega z}, a_j)$$

Demostración. — Consideramos el compacto

$$K := \overline{D}(0, R) \cap \{z : \text{Im}(z) \geq 0\},$$

es decir, la semi-circunferencia con bordes $\gamma_1(t) = t$ para $t \in [-R, R]$ y $\gamma_2(t) = Re^{it}$ para $t \in [0, 2\pi]$. Sea $\omega := f(z)e^{2\pi i \omega z} dz$.

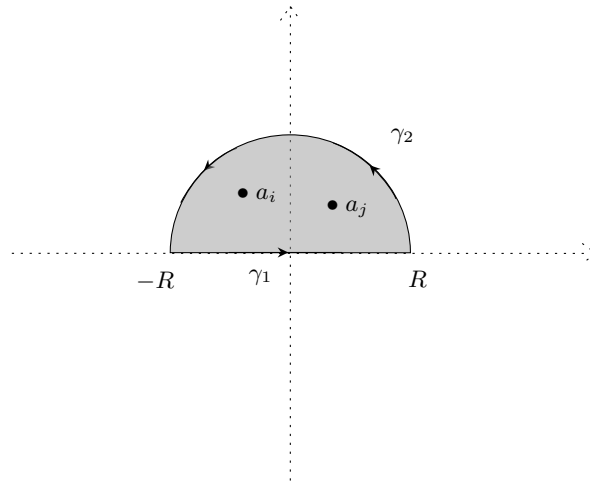


IMAGEN 2. Semi-disco de radio R en el semi-plano superior.

El Teorema del Residuo implica que

$$\int_{\partial K} \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = 2\pi i \sum_{a \in K} \text{Res}(f, a)$$

y donde

$$\int_{\gamma_1} \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-R}^R f(x)e^{2\pi i \omega x} dx \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} I$$

la integral deseada. Finalmente, notamos por un lado que $I_2 := \int_{\gamma_2} \omega$ cumple

$$|I_2| \leq M_R \int_0^\pi R e^{-2\pi\omega R \sin(t)} dt = 2M_R R \int_0^{\pi/2} e^{-2\pi\omega R \sin(t)} dt$$

donde $M_R := \sup_{\Gamma(0,R) \cap \bar{\mathbb{H}}} |f(z)|$ y donde $|e^{2\pi i \omega z}| = e^{-2\pi\omega R y(t)} = e^{-2\pi\omega R \sin(t)}$ si $z = z(t) = R \cos(t) + iR \sin(t)$. Por otro lado, se sabe que⁽²⁾ $\sin(t) \geq \frac{2t}{\pi}$ para $t \in [0, \pi/2]$ y luego

$$|I_2| \leq 2M_R \int_0^{\pi/2} e^{-4\omega R t} dt = \left(\frac{1 - e^{-2\pi R \omega}}{2\omega} \right) M_R \rightarrow 0$$

cuando $R \rightarrow +\infty$. □

Por ejemplo, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i \omega x}}{1+x^2} dx = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{2\pi i \omega z}}{1+z^2}, i \right) = 2\pi i \frac{e^{-2\pi\omega}}{2i} = \pi e^{-2\pi\omega}.$$

Observación importante 2.5.7. — El método anterior puede usarse (con pequeñas modificaciones) si f posee finitos polos simples reales. Por ejemplo, si $f(z) = 1/z$ y $e^{2\pi i \omega z} = e^{iz}$ (i.e., $\omega = 1/2\pi$) consideramos el compacto

$$K_{\varepsilon,R} := \{z = r e^{i\theta} \in \mathbb{C} \text{ tal que } \varepsilon \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi\},$$

es decir, la región delimitada por $\partial K = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ como en la figura.

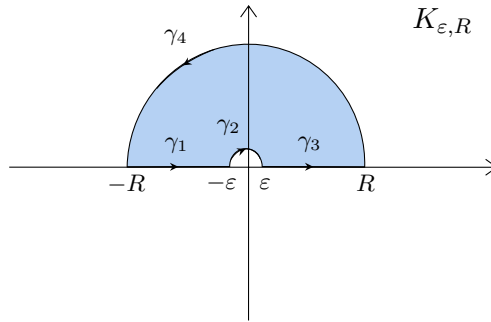


IMAGEN 3. El compacto $K_{\varepsilon,R}$

Dado que f no posee polos en $\operatorname{int}(K_{\varepsilon,R})$ y que $f(z) \rightarrow 0$ cuando $|z| \rightarrow +\infty$, la integral sobre el semi-círculo exterior tiene a 0 cuando $R \rightarrow +\infty$. Así, el

⁽²⁾ Si $g(t) := \frac{\sin(t)}{t}$ entonces $g'(t) = \frac{t \cos(t) - \sin(t)}{t^2} < 0$ para $t \in]0, \pi/2[$ dado que $t < \tan(t)$ en dicho intervalo. Así, $g(t) \geq g(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$ para todo $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Teorema de Cauchy-Goursat implica que

$$\lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0^+}} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\{|z|=\varepsilon, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}} \frac{e^{iz}}{z} dz \right) = 0$$

Para la última integral, notamos (usando series de Laurent) que $e^{iz}/z = z^{-1} + i + O(z)$ y luego, si $z = z(t) = \varepsilon e^{it}$ con $t \in [0, \pi]$ entonces

$$\int_{\{|z|=\varepsilon, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\pi}^0 (\varepsilon^{-1} e^{-it} + i + O(\varepsilon)) \varepsilon i e^{it} dt = -i\pi + 2i\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

de donde deducimos que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \stackrel{\text{def}}{=} 2 \lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0^+}} \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix} dx \\ &= -\frac{1}{i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\{|z|=\varepsilon, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}} \frac{e^{iz}}{z} dz = -\frac{1}{i} (-i\pi) = \pi. \end{aligned}$$

De lo anterior, concluimos además que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Ejemplo 2.5.8. — Integrales con factor x^a ($a \notin \mathbb{Z}$) en $[0, +\infty[$.

Sea $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Supongamos que queremos calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) x^a dx$$

donde $f(x) = P(x)/Q(x)$ es el cociente de polinomios $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ tales que:

- (1) $P(0) \neq 0$ y Q no posee ceros reales positivos (i.e., en $[0, +\infty[$)
- (2) $a > -1$ y $\deg(Q) > \deg(P) + a + 1$.

Consideremos $0 < \delta \ll \varepsilon < 1 < R$ y el compacto $K_{R,\delta,\varepsilon}$ como en la figura:

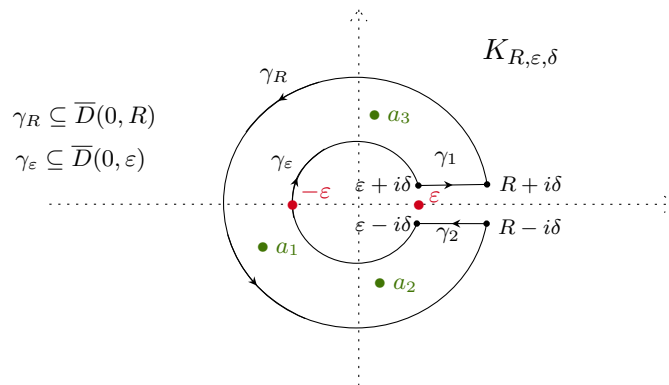


IMAGEN 4. El compacto $K_{R,\delta,\varepsilon}$.

Consideremos $f(z)z^a$ donde $z^a := \exp(a \log_\pi(z))$ está definida usando la rama del logaritmo definida en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{\geq 0}$, y se calcula que cuando $\delta \rightarrow 0^+$ la suma de las integrales sobre segmentos horizontales converge a

$$(1 - e^{2\pi ia}) \int_\epsilon^R f(x)x^a dx,$$

y que (2) implica que las integrales sobre los círculos interior y exterior tienden a cero cuando $\epsilon \rightarrow 0^+$ y $R \rightarrow +\infty$. En resumen, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)x^a dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi ia}} \sum_{a_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{\geq 0}} \text{Res}(f(z)z^a, a_j).$$

Por ejemplo,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{2\pi ia}{1 - e^{2\pi ia}} \text{Res}\left(\frac{z^a}{z(z+a)}, -1\right) = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi ia}} \frac{e^{i\pi a}}{(-1)} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$

Ejemplo 2.5.9. — Integrales con factor $\ln(x)$ en $[0, +\infty[$.

Supongamos que queremos calcular

$$\int_0^{+\infty} f(x) \ln(x) dx$$

donde $f(x) = P(x)/Q(x)$ es cociente de dos polinomios $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ tales que

- (1) Q no posee ceros en $\mathbb{R}^{\geq 0}$.
- (2) $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$

Aquí, la astucia es considerar $g(z) := (\log_\pi(z) - i\pi)^2 f(z)$ donde $\log_\pi(z)$ es la rama del logaritmo definida en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{\geq 0}$ y considerar el compacto $K_{R,\epsilon,\delta}$ del Ejemplo anterior. Con nuestras hipótesis:

- (1) Las integrales sobre los círculos interior y exterior tienden a 0 cuando $\epsilon \rightarrow 0^+$ y $R \rightarrow +\infty$.
- (2) En el eje real, obtenemos curvas $\gamma(t) = t \pm i\delta$ y luego, en el límite:

$$\underbrace{\int_\epsilon^R (\ln(x) - i\pi)^2 f(x) dx}_{\text{cuando } \delta \rightarrow 0^+} + \underbrace{\int_R^\epsilon (\ln(x) - i\pi + 2\pi i)^2 f(x) dx}_{\text{cuando } \delta \rightarrow 0^-} = -4i\pi \int_\epsilon^R f(x) \ln(x) dx$$

Así, obtenemos

$$\int_0^{+\infty} f(x) \ln(x) dx = -\frac{1}{2} \sum_{a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{\geq 0}} \text{Res}((\log_\pi(z) - i\pi)^2 f(z), a).$$

Observación 2.5.10. —

- (1) La integral $\int_0^{+\infty} f(x) \ln(x) dx$ converge incluso cuando $z = 1$ es un polo simple de $f(z) = P(z)/Q(z)$. Considerando, en el cálculo anterior, pequeños círculos de la forma $\Gamma(1, \epsilon)$ y usando $\text{Ln}(z)$ (la rama principal del logaritmo) se puede probar que

$$\int_0^{+\infty} f(x) \ln(x) dx = -\frac{1}{2} \text{Res}((\log_{\pi}(z) - i\pi)^2 f(z), a) + \frac{\pi^2}{2} \text{Res}(f(z), 1)$$

Por ejemplo,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \text{Res} \left(\underbrace{\left(\frac{(\log_{\pi}(z) - i\pi)^2}{z^2 - 1}, -1 \right)}_{=0 \text{ pues } \log_{\pi}(-1) = i\pi} \right) + \frac{\pi^2}{2} \text{Res}(f(z), 1).$$

Así, concluimos que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} dx = \frac{\pi}{4}.$$

- (2) La misma astucia permite evaluar (en principio) integrales de la forma

$$\int_0^{+\infty} f(x) R(\ln(x)) dx$$

donde $R \in \mathbb{R}[x]$ es cualquier polinomio. Para ello, se debe encontrar un polinomio $\tilde{R} \in \mathbb{C}[z]$ tal que $\tilde{R}(z + 2\pi i) - \tilde{R}(z) = R(z)$ y considerar la función $g(z) := \tilde{R}(\log_{\pi}(z)) f(z)$ en $K_{R, \epsilon, \delta}$.

Ejercicio 2.5.11. — Usar el Teorema del Residuos para calcular

- (1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx$
 (2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(x)}{x^2 + a^2} dx$ para $a > 0$

Ejercicio 2.5.12. — Probar las siguientes fórmulas:

- (1) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + \cos(x))^2} dx = \frac{2\pi a}{(a^2 - 1)^{3/2}}$ para todo $a > 1$.
 (2) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} \ln(a)$ para todo $a > 0$.

CAPÍTULO 3

INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DE FOURIER

Históricamente, la transformada de Fourier de una función real $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se obtiene al considerar la serie de Fourier de una función T -periódica como una suma de Riemann que, cuando $T \rightarrow +\infty$, tiende a la identidad

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(w)e^{2\pi iwx} dw \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde $\hat{f}(w) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi iwx} dx$, $w \in \mathbb{R}$, es la **transformada de Fourier de f** . Nuestro objetivo será dar un marco teórico formal donde estas fórmulas tengan sentido (¡y seamos capaces de probarlas!)

3.1. Transformada de Fourier y la clase \mathcal{F}

Definición 3.1.1. — Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}) función continua. Decimos que f tiene **decrecimiento moderado** si existe $A \in \mathbb{R}^{>0}$ tal que

$$|f(x)| \leq \frac{A}{1 + |x|^{1+\epsilon}}$$

para algún $\epsilon \in \mathbb{R}^{>0}$, y donde frecuentemente se fija $\epsilon = 1$. Denotamos por $M(\mathbb{R})$ al \mathbb{R} -espacio vectorial de funciones de decrecimiento moderado.

Lema 3.1.2. — Sea $f \in M(\mathbb{R})$, entonces la transformada de Fourier

$$\hat{f}(w) := \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi iwx} dx$$

converge para todo $w \in \mathbb{R}$.

Demostración. — Sea $I_N := \int_{-N}^N f(x)e^{2\pi i x w} dx$ para todo $N \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Entonces,

$$|I_N - I_M| \leq \int_{N \leq |x| \leq M} |f(x)| dx \leq \frac{2A}{\epsilon N^\epsilon}$$

si $M > N$ y luego $\{I_N\}_{N \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy si y solo si es convergente. □

Ejercicio 3.1.3. — Sea $f \in M(\mathbb{R})$ de decrecimiento moderado. Probar que:

- (1) Para todo $h \in \mathbb{R}$ se tiene $\int_{\mathbb{R}} f(x-h) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$.
- (2) Para todo $\delta \in \mathbb{R}^{>0}$ se tiene $\delta \int_{\mathbb{R}} f(\delta x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$.
- (3) $\int_{\mathbb{R}} |f(x-h) - f(x)| dx \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$.

Ejercicio 3.1.4. — Sea $f \in M(\mathbb{R})$ de decrecimiento moderado. Probar que si:

- (1) $g(x) := f(x+h)$ con $h \in \mathbb{R}$, entonces $\hat{g}(w) = \hat{f}(w)e^{2\pi i h w}$.
- (2) $g(x) := f(x)e^{-2\pi i x h}$ con $h \in \mathbb{R}$, entonces $\hat{g}(w) = \hat{f}(w+h)$.
- (3) $g(x) := f(\delta x)$ con $\delta \in \mathbb{R}^{>0}$, entonces $\hat{g}(w) = \delta^{-1} \hat{f}(w/\delta)$.

Definición 3.1.5. — Sea $a \in \mathbb{R}^{>0}$ y consideremos la franja horizontal

$$S_a := \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |\text{Im}(z)| < a\}$$

Decimos que una función $f \in \mathcal{O}(S_a)$ pertenece a la **clase** \mathcal{F}_a si existe $A \in \mathbb{R}^{>0}$ tal que

$$|f(x+iy)| \leq \frac{A}{1+x^2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y $|y| < a$, i.e., f tiene decrecimiento moderado (uniforme) en cada recta horizontal $\{\text{Im}(z) = y\}$ con $-a < y < a$. Más aún, decimos que f pertenece a la **clase** \mathcal{F}_{a_0} para algún $a_0 \in \mathbb{R}^{>0}$.

Ejemplo 3.1.6. —

- (1) $f(x) = e^{-x^2} \in \mathcal{F}_a$ para todo $a > 0$.
- (2) Sea $c \in \mathbb{R}^{>0}$ y consideremos $f(z) = 1/(z^2 + c^2)$, con polos simples en $z = \pm ic$, entonces $f \in \mathcal{F}_a$ para todo $0 < a < c$. En efecto

$$|f(z)| \leq \frac{1}{||z^2| - c^2|} = \frac{1}{|x^2 + y^2 - c^2|} = \frac{1}{x^2 + (c^2 - y^2)}$$

Ejercicio 3.1.7. —

- (1) Probar que $f(z) = 1/\cosh(\pi z)$ pertenece a \mathcal{F}_a para todo $0 < a < 1/2$.

- (2) Probar que si $f \in \mathcal{F}_a$ entonces para todo $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ se tiene que $f^{(n)} \in \mathcal{F}_b$ para todo $0 < b < a$.

Indicación: Considerar las fórmulas y desigualdades de Cauchy

Teorema 3.1.8. — Sea $f \in \mathcal{F}_a$ para cierto $a > 0$. Entonces, existe $B > 0$ tal que

$$|\hat{f}(w)| \leq B e^{-2\pi b|w|}$$

para todo $w \in \mathbb{R}$ y todo $0 \leq b < a$.

Demostración. — Dado que $\hat{f}(w) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x w} dx$, el caso $b = 0$ (i.e., \hat{f} es acotada) se deduce del lema anterior (toda sucesión de Cauchy es acotada!). Luego, podemos asumir que $0 < b < a$. Supongamos que $w > 0$ y sea $g(z) := f(z) e^{-2\pi i z w}$:

Consideremos el compacto

y notar que

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq \int_0^b |f(-R - it) e^{-2\pi i(-R-it)w}| dt \leq \int_0^b \frac{A}{R^2} e^{-\pi t w} dt \\ &\leq \int_0^b \frac{A}{R^2} e^0 dt = \frac{bA}{R^2} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

y de manera similar $|I_2| \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$. Luego, cuando $R \rightarrow +\infty$, el Teorema de Cauchy se traduce en

$$\begin{aligned} \hat{f}(w) &= \int_{\mathbb{R}} f(x - ib) e^{-2\pi i(x-ib)w} dx \\ \implies |\hat{f}(w)| &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{A}{1+x^2} e^{-2\pi b w} dx \leq B e^{-2\pi b w} \end{aligned}$$

para cierto $B \in \mathbb{R}^{>0}$. El caso $w < 0$ se prueba de manera similar cambiando K_R por el rectángulo de vértices $-R, R, -R + ib, R + ib$. □

Observación 3.1.9. — El teorema anterior nos dice que si $f \in \mathcal{F}$, entonces \hat{f} decrece rápidamente cuando $|w| \rightarrow +\infty$. Además, mientras más podemos extender f (i.e., mientras mayor sea $a > 0$) entonces tenemos un mejor decrecimiento de \hat{f} (i.e., mayor será b).

3.2. Transformada inversa de Fourier y Fórmula de Poisson

En esta sección veremos cómo recuperar una función de clase \mathcal{F} a partir de su transformada de Fourier.

Lema 3.2.1. — Sea $A \in \mathbb{R}^{>0}$ y $B \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_0^{+\infty} e^{-(A+iB)w} dw = \frac{1}{A+iB}$$

Demostración. — Como $A > 0$ y $B \in \mathbb{R}$, $|e^{-(A+iB)w}| = e^{-Aw}$ y luego $\int_0^{+\infty} e^{-(A+iB)w} dw$ converge. Por definición

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-(A+iB)w} dw &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R e^{-(A+iB)w} dw \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[-\frac{e^{-(A+iB)w}}{A+iB} \right]_0^R \\ &= \frac{1}{A+iB} \end{aligned}$$

□

Teorema 3.2.2. — (Teorema de inversión de Fourier). Sea $f \in \mathcal{F}$, entonces:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(w) e^{2\pi i x w} dw$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. — Escribamos

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(w) e^{2\pi i x w} dw = \int_{-\infty}^0 \hat{f}(w) e^{2\pi i x w} dw + \int_0^{+\infty} \hat{f}(w) e^{2\pi i x w} dw$$

Supongamos que $w > 0$ (2da integral): Si $f \in \mathcal{F}_a$, fijamos b tal que $0 < b < a$ y recordemos que (c.f. §2.5)

$$\hat{f}(w) = \int_{\mathbb{R}} f(u - ib) e^{-2\pi i (u-ib)w} du$$

Luego:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \hat{f}(w)e^{2\pi i x w} dw &\stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u-ib)e^{-2\pi i(u-ib)w} e^{2\pi i x w} dudw \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u-ib) \int_0^{+\infty} e^{-2\pi i(u-ib-x)w} dw du \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u-ib) \frac{1}{2\pi b + 2\pi i(u-x)} du \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u-ib)}{u-ib-x} du
 \end{aligned}$$

i.e.,

$$\int_0^{+\infty} \hat{f}(w)e^{2\pi i x w} dw \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z-x} dz$$

donde γ_R es la curva $\gamma_R(t) = t - ib$ con $t \in [-R, R]$.

De manera completamente análoga:

$$\int_{-\infty}^0 \hat{f}(w)e^{2\pi i x w} dw = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}_R} \frac{f(z)}{z-x} dz$$

donde $\tilde{\gamma}_R$ es la curva $\tilde{\gamma}_R(t) = t + ib$ con $t \in [-R, R]$. Así, si consideramos el compacto:

y la función $f \in \mathcal{O}(K_R)$, tenemos que la fórmula de Cauchy implica que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_R} \frac{f(z)}{z-x} dz$$

Por otra parte, el hecho que $f \in \mathcal{F}_a$ implica que

$$\int_{\gamma_i} \frac{f(z)}{z-x} dz \rightarrow 0$$

cuando $R \rightarrow +\infty$ para $i = 1, 2$. Finalmente, deducimos que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_R} \frac{f(z)}{z-x} dz \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \hat{f}(w)e^{2\pi i x w} dw + \int_{-\infty}^0 \hat{f}(w)e^{2\pi i w x} dw$$

□

Ejemplo 3.2.3. — Funciones características:

(1) Distribución normal. Sea $f(x) = e^{-\pi x^2}$ y veamos que

$$\hat{f}(w) = e^{-\pi w^2}$$

Notar que

$$\hat{f}(w) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x w} dx \implies \hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1$$

Así, podemos asumir $w \neq 0$. Si $w > 0$ consideremos el compacto

y sea $f(z) = e^{-\pi z^2}$, $I_j := \int_{\gamma_j} f(z) dz$. El Teorema de Cauchy implica que $\int_{\partial K_R} f(z) dz = 0$. Por otro lado:

$$a) \quad I_1 = \int_{-R}^R f(t) dt \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2} dt = 1.$$

b)

$$I_3 = \int_R^{-R} f(t + iw) dt = - \int_{-R}^R e^{-\pi(t+iw)^2} dt = -e^{\pi w^2} \int_{-R}^R e^{-\pi t} e^{-2\pi i t w} dw$$

$$\text{y luego } I_3 \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} -e^{\pi w^2} \hat{f}(w).$$

c)

$$I_2 = \int_0^w f(R + it) i dt = \int_0^w e^{-\pi(R^2 + 2iRt - t^2)} i dt$$

Luego $|I_2| \leq C_w e^{-\pi R^2} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$ y similarmente $|I_4| \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$.

Finalmente, $0 = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 1 - e^{\pi w^2} \hat{f}(w)$, i.e., $\hat{f}(w) = e^{-\pi w^2}$.

El caso $w < 0$ es completamente análogo.

Ejercicio 3.2.4. — Sea $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma \in \mathbb{R}^{>0}$. Calcular $\hat{f}(w)$.

(2) Distribución de Cauchy. Sea $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Vimos en §2.5 que

$$\hat{f}(-w) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi i w x}}{1+x^2} dx = \pi e^{-2\pi w}$$

para $w > 0$. De manera similar (e.g. usando el Teorema de residuos) se calcula que $\hat{f}(w) = \pi e^{-2\pi w}$ para $w > 0$, i.e.,

$$\hat{f}(w) = \pi e^{-2\pi|w|} \quad \forall w \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 3.2.5. — Sea

$$f(x) = \frac{1}{\pi\gamma \left(1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right)}$$

donde $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\gamma \in \mathbb{R}^{>0}$. Calcular $\hat{f}(w)$.

(3) Distribución de Laplace (o doble exponencial). Sea $f(x) = e^{-2\pi|x|}$. El ejemplo (2), junto con el Teorema de inversión de Fourier, implica que:

$$\frac{1}{1+x^2} = \int_{\mathbb{R}} \pi e^{-2\pi|w|} e^{2\pi i x w} dw \xleftrightarrow[w \mapsto -t]{x \mapsto w} \frac{1}{1+w^2} = \int_{\mathbb{R}} \pi e^{-2\pi|t|} e^{-2\pi i t w} dt$$

y luego $\hat{f}(w) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+w^2}$ para todo $w \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.2.6. — (Fórmula de Poisson). Sea $f \in \mathcal{F}$, entonces

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)$$

Demostración. — Supongamos que $f \in \mathcal{F}_a$ y sea b tal que $0 < b < a$. Notemos que la función

$$g(z) = \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1}$$

posee polos simples en cada $z = n \in \mathbb{Z}$ y además $\text{Res}(g, n) = 1/(2\pi i)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Luego $f(z)/(e^{2\pi i z} - 1)$ posee polos simples en cada $z = n \in \mathbb{Z}$ y además

$$\text{Res}\left(\frac{f(z)}{e^{2\pi i z} - 1}, n\right) = \frac{f(n)}{2\pi i}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Sea $N \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y consideremos el compacto K_N dado por

Sea $I_j := \int_{\gamma_j} \frac{f(z)}{e^{2\pi i z} - 1}$. Luego, el Teorema de Residuos implica que

$$\int_{\partial K_N} \frac{f(z)}{e^{2\pi i z} - 1} dz = 2\pi i \sum_{a \in K_N} \text{Res}\left(\frac{f(z)}{e^{2\pi i z} - 1}, a\right) = \sum_{n=-N}^N f(n)$$

Dado que $f \in \mathcal{F}$,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{-N}^N f(n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)$$

converge y además $|I_2|, |I_4| \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow +\infty$. Luego, basta analizar $\lim_{N \rightarrow +\infty} I_1$ y $\lim_{N \rightarrow +\infty} I_3$. Notar por un lado que si $z(t) = t - ib$ pertenece a γ_1 , entonces se tiene $|e^{2\pi i z(t)}| = e^{2\pi b} > 1$ pues $b > 0$. Así, dado que

$$\frac{1}{w-1} \sum_{n \geq 0} w^{-(n+1)}$$

si $|w| > 1$, tenemos que

$$\frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} = e^{-\pi iz} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2\pi inz} \quad \forall z \in \gamma_1$$

De manera similar, dado que $|e^{2\pi iz}| < 1$ si $z \in \gamma_3$, tenemos que

$$\frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} = - \sum_{n=0}^{+\infty} e^{2\pi inz} \quad \forall z \in \gamma_3$$

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\int_{\gamma_1} f(z) \left(e^{-2\pi iz} \sum_{n \geq 0} e^{-2\pi inz} \right) dz + \int_{\gamma_3^-} f(z) \left(\sum_{n \geq 0} e^{2\pi inz} \right) dz \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_1} f(z) e^{-2\pi i(n+1)z} dz + \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_3^-} f(z) e^{2\pi inz} dz \end{aligned}$$

Usando que $\hat{f}(w) = \int_{\mathbb{R}} f(x - ib) e^{-2\pi i(x-ib)w} dx$, y similar para la traslación $x \mapsto x + ib$, obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i(n+1)x} dx + \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2\pi inx} dx \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{f}(n+1) + \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{f}(-n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \end{aligned}$$

□

Ejercicio 3.2.7. — Para todo $t \in \mathbb{R}^{>0}$, se define la **función theta**

$$\theta(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}$$

Probar, usando adecuadamente la fórmula de Poisson, que

$$\theta(t) = e^{-1/2} \theta(1/t) \quad t \in \mathbb{R}^{>0}$$

Ejercicio 3.2.8. — Probar que para todo $a \in \mathbb{R}^{>0}$ se tiene que

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{a}{a^2 + n^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi a|n|} = \coth(\pi a)$$

Cultura general 3.2.9. — La función zeta de Riemann

$$\zeta(z) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}$$

es holomorfa para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(z) > 1$ (gracias al M -test de Weierstrass). Más aún, se puede probar que para $\operatorname{Re}(z) > 1$ se tiene que

$$\pi^{-z/2} \Gamma(z/2) \zeta(z) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} u^{(z/2)-1} (\theta(u) - 1) du$$

¡Atención! La ecuación funcional de la función theta $\theta(t) = t^{-1/2} \theta(1/t)$ permite extender analíticamente la función zeta de Riemann a $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

3.3. Teorema de Phragmén-Lindelöf y Teorema de Paley-Wiener

En la sección anterior, probamos que si $f \in \mathcal{F}$ entonces

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(w) e^{2\pi i x w} dw$$

donde

$$\hat{f}(w) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x w} dx$$

Sin embargo, es posible probar que el Teorema de inversión de Fourier sigue valiendo si f y \hat{f} son funciones de decrecimiento moderado:

$$|f(x)| \leq \frac{A}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |\hat{f}(w)| \leq \frac{A'}{1+w^2} \quad \forall w \in \mathbb{R}$$

Es natural entonces preguntarse por condiciones que nos aseguren que podemos usar técnicas de análisis complejo (y no solo análisis real).

Teorema 3.3.1. — Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función de decrecimiento moderado, y supongamos que existen constantes $a, A \in \mathbb{R}^{>0}$ tales que

$$|\hat{f}(w)| \leq A e^{-2\pi a |w|} \quad \forall w \in \mathbb{R}$$

Entonces, f es la restricción a \mathbb{R} de una función $f(z)$, con $f \in \mathcal{O}(S_b)$ para todo b tal que $0 < b < a$. Aquí

$$S_b \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |\operatorname{Im}(z)| < b\}$$

Demostración. — Para $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, se define $f_n(z) = \int_{-n}^n \hat{f}(w) e^{2\pi i w z} dw$. Dado que $F(z, w) = \hat{f}(w) e^{2\pi i w z}$ es continua y $F(z, w_0) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ para todo $w_0 \in [-n, n]$ fijo, tenemos que $f_n \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ es entera para todo $n \geq 1$.

Por otro lado, notamos que nuestra hipótesis sobre \hat{f} implica

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(w) e^{2\pi i w z} dw \right| \leq A \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi(a-b)|w|} dw < +\infty$$

para todo $b < a$. De manera similar, tenemos que para todo $z \in S_b$ se cumple

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(w) e^{2\pi i w z} dw \right| \leq A \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi(a-b)|w|} dw \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

y por ende $f(z) := \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(w) e^{2\pi i w z} dw$ es límite uniforme de funciones holomorfas en S_b , de donde se deduce que $f \in \mathcal{O}(S_b)$. □

Corolario 3.3.2. — Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función de decrecimiento moderado, y supongamos que existen $a, A \in \mathbb{R}^{>0}$ tales que $|\hat{f}(w)| \leq A e^{-2\pi a|w|}$ para todo $w \in \mathbb{R}$. Si $f(x) = 0$ para todo $x \in]c, d[$ intervalo abierto, entonces $f \equiv 0$.

Demostración. — $f \in \mathcal{O}(S_b)$ tendría ceros no-aislados, entonces $f \equiv 0$ en S_b . □

Ejercicio 3.3.3. — Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función continua de soporte compacto (i.e., existe $R \in \mathbb{R}^{>0}$ tal que $f(x) = 0$ si $|x| > R$). Probar que si \hat{f} también es una función de soporte compacto, entonces $f \equiv 0$ en \mathbb{R} .

El Teorema de Palet-Wiener da una descripción precisa del comportamiento de funciones cuya transformada de Fourier es de soporte compacto. Para ello, será necesario el siguiente refinamiento del principio del máximo a abiertos no-acotados.

3.4. Espacio de Schwartz y Aplicaciones a EDP

En esta sección estudiaremos el **espacio de Schwartz** de funciones de crecimiento rápido que, a pesar de ser un poco más restrictivo que el espacio de funciones de crecimiento moderado $M(\mathbb{R})$, tiene la ventaja de ser un espacio conveniente para realizar cálculos.

Definición 3.4.1. — Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}) función de clase \mathcal{C}^∞ . Decimos que f tiene **decrecimiento rápido** si

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(\ell)}(x)| < +\infty \quad \forall k, \ell \geq 0$$

Denotamos por $S(\mathbb{R})$ el \mathbb{R} -espacio vectorial de funciones de decrecimiento rápido llamado el **espacio de Schwartz** de \mathbb{R} .

Ejemplo 3.4.2. —

- (1) Si $f \in S(\mathbb{R})$, entonces $f' \in S(\mathbb{R})$. En particular, $S(\mathbb{R})$ es cerrado bajo diferenciación (i.e., $d/dx : S(\mathbb{R}) \rightarrow S(\mathbb{R})$ es un endomorfismo).

- (2) Si $f \in S(\mathbb{R})$, entonces $xf(x) \in S(\mathbb{R})$. En particular, $S(\mathbb{R})$ es cerrado bajo multiplicación por polinomios (i.e., $S(\mathbb{R})$ es un $\mathbb{R}[x]$ -módulo).
- (3) Para todo $a > 0$, la gaussiana $f(x) = e^{-ax^2}$ pertenece a $S(\mathbb{R})$.
- (4) Si $f(x) = e^{-|x|}$, entonces $f \in M(\mathbb{R})$ pero $f \notin S(\mathbb{R})$ (pues $f \notin \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$).

Ejercicio 3.4.3. — Sea $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Probar que la **función bump** (o **función test**) definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \text{ o } x \geq b \\ e^{-1/(x-a)}e^{-1/(x-b)} & \text{si } a < x < b \end{cases}$$

pertenece a $S(\mathbb{R})$.

Observación 3.4.4. — Si $f \in S(\mathbb{R}) \subseteq M(\mathbb{R})$, entonces

$$\hat{f}(w) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x w} dx$$

está bien definida.

¡Atención! En ocasiones, escribimos $\mathcal{F}[f] := \hat{f}$ para denotar la transformada de Fourier de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. De manera similar, escribimos $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] = f$ siempre que el Teorema de Inversión de Fourier sea válido (e.g., si $f, \hat{f} \in M(\mathbb{R})$).

Proposición 3.4.5. — Sea $f \in S(\mathbb{R})$, entonces

- (1) $\mathcal{F}[f'(x)](w) = 2\pi i w \hat{f}(w)$.
- (2) $\mathcal{F}[-2\pi i x f(x)](w) = \hat{f}'(w)$.

Demostración. — Para (1), integramos por partes

$$\int_{-N}^N f'(x)e^{-2\pi i x w} dx = [f(x)e^{-2\pi i x w}]_{-N}^N + 2\pi i w \int_{-N}^N f(x)e^{-2\pi i x w} dx$$

Dado que $f \in S(\mathbb{R}) \subseteq M(\mathbb{R})$, obtenemos la fórmula deseada cuando $N \rightarrow +\infty$:

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)e^{-2\pi i x w} dx = 2\pi i w \hat{f}(w)$$

Para (2), probaremos simultáneamente que \hat{f} es diferenciable y calcularemos \hat{f}' . Sea $\epsilon > 0$ y $h \in \mathbb{R}$, y definamos $g(x) := -2\pi i x f(x)$. Entonces

$$\frac{\hat{f}(w+h) - \hat{f}(w)}{h} - \hat{g}(w) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x w} \left(\frac{e^{-2\pi i x h} - 1}{h} + 2\pi i x \right) dx$$

Como $f(x)$ y $xf(x)$ pertenecen a $S(\mathbb{R})$, existe $N \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que

$$\int_{|x| \geq N} |f(x)| dx \leq \epsilon \quad \text{y} \quad \int_{|x| \geq N} |x| \cdot |f(x)| dx \leq \epsilon$$

Además, dado que $(e^{-2\pi i x h})'(0) = -2\pi i x$, para $|x| \leq N$ (compacto), existe $\delta > 0$ tal que si $|h| < \delta$ entonces

$$\left| \frac{e^{-2\pi i x h} - 1}{h} + 2\pi i x \right| \leq \frac{\epsilon}{N}$$

Luego, para $|h| < \delta$ tenemos que

$$\left| \frac{\hat{f}(w+h) - \hat{f}(w)}{h} - \hat{g}(w) \right| \leq \int_{-N}^N |f(x)| \cdot \left| \frac{e^{-2\pi i x h} - 1}{h} + 2\pi i x \right| dx + C\epsilon$$

Así, $\hat{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y $\hat{f}'(w) = \hat{g}(w)$, con $g(x) = -2\pi i x f(x)$. □

Como consecuencia de lo anterior obtenemos que la transformada de Fourier define un automorfismo del espacio de Schwartz.

Teorema 3.4.6. — Sea $f \in S(\mathbb{R})$, entonces $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$.

Demostración. — Notar que si $g \in S(\mathbb{R})$ entonces \hat{g} es acotada (c.f., Lema en §3.1), i.e., $\sup_{w \in \mathbb{R}} |\hat{g}(w)| < +\infty$. Luego, si consideramos

$$g(x) := \frac{1}{(2\pi i)^k} \frac{d^k}{dx^k} \left((-2\pi i x)^\ell f(x) \right) \in S(\mathbb{R})$$

Luego $\hat{g}(w) = w^k \hat{f}^\ell(x)$ es acotada. Así, $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$. □

Terminología (Kernel Gaussiano). Recordemos que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1$, y que $f(x) = e^{-\pi x^2}$ es su propia transformada de Fourier, i.e., $\hat{f}(w) = e^{-\pi w^2}$. Más generalmente, para todo $\delta > 0$ definimos el **kernel Gaussiano**

$$K_\delta(x) := \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\pi x^2/\delta}, \quad \text{con} \quad \hat{K}_\delta(w) = e^{-\pi \delta w^2}$$

Notar que si $\delta \rightarrow 0^+$ entonces K_δ se concentra en el origen y \hat{K}_δ tiende a aplanarse, i.e., K_δ, \hat{K}_δ no pueden concentrarse simultáneamente en el origen: la demostración matemática del Principio de Incertidumbre de Heisenberg se basa en esta idea!

Tal como veremos al analizar ciertas Ecuaciones en Derivadas Parciales, los kernel son útiles para modificar funciones mediante convolución.

Definición 3.4.7. — Sean $f, g \in S(\mathbb{R})$. Definimos su **convolución** mediante

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt$$

En particular, $f * g = g * f$ y está bien definida (pues para $x \in \mathbb{R}$ fijo, la función $f(x-t)g(t)$ tiene decrecimiento rápido en t).

Proposición 3.4.8. — Sean $f, g \in S(\mathbb{R})$. Entonces:

(1) Se cumple la fórmula multiplicativa

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)g(y)dy$$

(2) $f * g \in S(\mathbb{R})$.

(3) $\mathcal{F}[f * g](w) = \hat{f}\hat{g}(w)$.

Demostración. — La idea de la demostración (admitiendo algunos resultados de Teoría de la Medida):

(1) La función $F(x, y) := f(x)g(y)e^{-2\pi ixy}$ es de decrecimiento moderado al fijar la variable x o y , $F_1(x) := \int_{\mathbb{R}} F(x, y)dy$ es de decrecimiento moderado y $F_2(y) = \int_{\mathbb{R}} F(x, y)dx$ también. Así, el Teorema de Fubini implica que

$$\int_{\mathbb{R}} F_1(u)du = \int_{\mathbb{R}} F_2(y)dy$$

i.e., (1). Para (2), dado que $g \in S(\mathbb{R})$, se tiene que para todo $\ell \geq 0$ se cumple (para $y \in \mathbb{R}$ fijo)

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^\ell |g(x-y)| \leq A_\ell (1 + |y|)^2 \quad (\text{ejercicio})$$

Luego,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^\ell |(f * g)(x)| \leq A_\ell \int_{\mathbb{R}} |f(y)|(1 + |y|)^\ell dy < +\infty \quad \forall \ell \geq 0$$

De manera similar, el hecho de que $g \in S(\mathbb{R})$ permite bajo el signo integral y probar que $(f * g)^{(k)}(x) = (f * g^{(k)})(x)$ para todo $k \geq 1$ y luego, como $g^{(k)} \in S(\mathbb{R})$, el cálculo anterior implica que $f * g \in S(\mathbb{R})$.

Finalmente, (3) se deduce como en (1) al considerar

$$F(x, y) := f(y)g(x-y)e^{-2\pi ixy}$$

□

Teorema 3.4.9. — Sea $\delta > 0$. El kernel Gaussiano

$$K_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\pi x^2/\delta}$$

verifica que

- (1) $K_\delta(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $\int_{\mathbb{R}} K_\delta(x) dx = 1$.
- (2) Para todo $\eta > 0$, $\int_{|x|>\eta} |K_\delta(x)| dx \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$.
- (3) Para todo $f \in S(\mathbb{R})$, $(f * K_\delta)(x) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} f(x)$ uniformemente en x .

Demostración. — El hecho que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1$ implica (1). Para (2), notemos que

$$\int_{|x|>\eta} |K_\delta(x)| dx \stackrel{x=y\sqrt{\delta}}{=} \int_{|y|>\eta/\sqrt{\delta}} e^{-\pi y^2} dy \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

Para (3), notemos que si $f \in S(\mathbb{R})$ entonces f es uniformemente continua en \mathbb{R} . Para todo $\epsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que $|f(x)| < \epsilon$ si $|x| \geq R$. Además, f es uniformemente continua en el compacto $[-2R, 2R]$ y luego existe $\eta > 0$ tal que si $|x|, |y| \leq 2R$ y $|x - y| < \eta$ implica $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Por otro lado, si $|x| \leq 2R$ y $|y| > 2R$ entonces si $|x - y| < \eta$:

$$|x| \geq |y| - |x - y| \geq 2R - \eta \geq R \implies |f(x) - f(y)| < 2\epsilon$$

Similar: $|x| > 2R$ y $|y| > 2R$: $|x - y| < \eta$, luego $|f(x) - f(y)| < 2\epsilon$. Finalmente, se tiene que:

$$(f * K_\delta)(x) \stackrel{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}} K_\delta(t)(f(x - t) - f(x)) dt$$

y así, dado que $K_\delta \geq 0$, tenemos

$$|f * K_\delta(x) - f(x)| \leq \underbrace{\int_{|t|>\eta} K_\delta(t) |f(x - t) - f(x)| dt}_{=I_1} + \underbrace{\int_{|t|\leq\eta} |f(x - t) - f(x)| dt}_{=I_2}$$

Aquí, $I_1 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$ por (2) y dado que f es acotada, y $I_2 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$ pues f es uniformemente continua y $\int_{\mathbb{R}} K_\delta(t) dt = 1$. □

Las ideas utilizadas en el resultado anterior permiten resolver EDP al escoger buenos kernel.

Supongamos que queremos resolver la Ecuación de Calor 1-dimensional, i.e., encontrar $u(x, t)$ tal que

$$(E) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{para todo } x \in \mathbb{R} \text{ y } t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & \text{para todo } x \in \mathbb{R} \text{ (temperatura inicial)} \end{cases}$$

Al tomar transformada de Fourier, respecto a la variable x , a la ecuación (E):

$$\implies \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(w, t) = (2\pi iw)^2 \hat{u}(w, t) = -4\pi^2 w^2 \hat{u}(w, t)$$

Para w fijo, obtenemos una EDO en la variable t de solución

$$\hat{u}(w, t) = A(w)e^{-4\pi^2 w^2 t}$$

donde

- (1) $\hat{u}(w, 0) = \hat{f}(w)$ y luego $A(w) = \hat{f}(w)$.
- (2) La función $e^{-4\pi^2 w^2 t}$ es la transformada de Fourier del **kernel de Calor** $H_t(x) := K_\delta(x)$ con $\delta = 4\pi t$, i.e.,

$$H_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t} \quad \text{y} \quad \hat{H}_t(w) = e^{-4\pi^2 w^2 t}$$

Teorema 3.4.10. — Dado $f \in S(\mathbb{R})$, definimos $u(x, t) := (f * H_t)(x)$ para todo $t > 0$. Entonces

- (1) La función u es de clase \mathcal{C}^∞ para $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$, y además u verifica la Ecuación de Calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- (2) $u(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} f(x)$ uniformemente en $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. — Como $u \stackrel{\text{def}}{=} f * H_t$, tenemos que $\hat{u} = \hat{f} \cdot \hat{H}_t = \hat{f}(w)e^{-4\pi^2 w^2 t}$ y luego $u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(w)e^{-4\pi^2 w^2 t} e^{2\pi i w x} dw$. Así, (1) se obtiene derivando dicha integral, mientras que (2) es consecuencia directa del Teorema anterior dado que $\delta = 4\pi t \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$. □

Ejercicio 3.4.11. — Considere la región $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R}, y > 0\}$ y considere la **Ecuación de Laplace**

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{en } \Omega \\ u(x, 0) = f(x) & \text{para todo } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- (1) Deducir que $\hat{u}(w, y) = \hat{f}(w)e^{-2\pi|w|y}$ si $f \in S(\mathbb{R})$.
- (2) Probar que $u(x, y) = (f * P_y)(x)$ soluciona la EDP anterior, donde

$$P_y(x) := \frac{1}{\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}$$

es el **kernel de Poisson**.