

# Ayudantía 4 Estructuras Algebraicas

## MAT214

Universidad Técnica Federico Santa María

1 de abril de 2019

1. Sea un grupo  $G$  actuando sobre un conjunto  $X$ . Pruebe que si  $a, b \in X$ , y  $b = g \cdot a$  para algún  $g \in G$ , entonces  $G_b = gG_ag^{-1}$ . Deduzca que si la acción es transitiva, entonces el kernel de la acción es  $\bigcap_{g \in G} gG_ag^{-1}$ .

2. Sea  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$  y sea  $G = SL_2(\mathbb{R})$ . Demuestre que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}$$

es una acción de grupo. Encuentre el estabilizador de  $i$ .

3. ¿Cuántos elementos de orden 7 deben haber en un grupo simple de orden 168?
4. Demostrar que no existen grupos simples de orden  $pq$  con  $p, q$  primos.
5. Sea  $P$  un  $p$ -subgrupo de Sylow normal en  $G$  y sea  $H \leq G$ . Pruebe que  $P \cap H$  es el único  $p$ -subgrupo de Sylow de  $H$ .
6. Sea  $|G| = pqr$  con  $p, r, q$  número primos distintos, entonces el grupo es no simple. Suponga por contradicción que el grupo es simple, luego:
  - a) Demuestre que  $n_r = pq$ .
  - b) Demuestre que  $n_q = r$ .
  - c) Demuestre que  $n_p \geq q$  y concluya.