Tarea 2 – Estructuras Algebraicas

Profesor: Pedro Montero, Ayudante: Mateo Hidalgo

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

Fecha de entrega:[1] Hasta el Viernes 14 de Junio de 2024 a las 23h59.

Esta Tarea puede ser realizada en grupos de 1 o 2 personas, y se debe indicar el nombre de cada integrante. Excepcionalmente, la Tarea puede ser realizadas en grupos de 3 personas pero en tal caso se deben desarrollar **todos los problemas** (es decir, Problema A y Problema B).

1. **Anillos, dominios y cuerpos de fracciones (5 pts).** Sea A un dominio entero. Decimos que A es un **dominio euclideano** si existe una función (*euclideana*) $\varphi : A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ tal que para todos $a, b \in A$ con $b \neq 0$ existe una escritura (no necesariamente única)
$$a = bq + r \text{ donde } r = 0, \text{ o bien } r \neq 0 \text{ y } \varphi(r) < \varphi(b).$$
Probar que un dominio euclideano es un dominio de ideales principales. Deducir que si k es un cuerpo entonces $k[X]$ es un dominio de ideales principales.

   Indicación: Dado $I \subseteq A$ ideal no-nulo, sea $x \in I \setminus \{0\}$ tal que $\varphi(x)$ sea minimal. Probar que $I = \langle x \rangle$.

2. **Ideales y anillos cocientes (5 pts).** Sea A un anillo y $I \subseteq A$ un ideal propio (i.e., $I \neq A$). Supogamos que todo elemento en el complemento de I es una unidad (i.e., si $x \in A \setminus I$ entonces $x \in A^\times$). Probar que I es un ideal maximal y que I es el único ideal maximal de A.

3. **Anillos reducidos, noetherianos y Teorema de la base de Hilbert (10 pts).** Sea $I \subseteq A$ un ideal de A, y sea $\sqrt{I} \subseteq A$ su ideal radical. Probar que si A es noetheriano entonces existe $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que $(\sqrt{I})^n \subseteq I$ (i.e., para todo $x \in \sqrt{I}$ se tiene que $x^n \in I$).[2]

   Indicación: Por definición, si $\sqrt{I} = \langle a_1, \ldots, a_r \rangle$, entonces $(\sqrt{I})^n$ está generado por
$$\{P(a_1, \ldots, a_r),\ P \in A[X_1, \ldots, X_r] \text{ polinomio homogéneo de grado } n\}.$$
   Por ejemplo, si $\sqrt{I} = \langle a, b \rangle$ entonces $(\sqrt{I})^3 = \langle a^3, a^2b, ab^2, b^3 \rangle$.

4. **Hilbert Nullstellensatz y Topología de Zariski (10 pts).** Sea $I = \langle X^3 - Y^6, XY - Y^3 \rangle \subseteq \mathbb{C}[X, Y]$. Determinar el radical el ideal I y describir $V(I) \subseteq \mathbb{A}^2$.

5. **Geometría de ideales y operaciones entre ideales (10 pts).** Consideremos la variedad algebraica afín
$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3 \mid y = x^2,\ z = x^3\}.$$
Determinar el ideal $\mathfrak{I}(X)$, ¿es X irreducible?.

6. **Módulos, submódulos y cocientes (10 pts).** Sea A un dominio entero y $\mathbb{K} = \mathrm{Fr}(A)$ su cuerpo de fracciones. Sea $x \in A$ no-nulo y sea $M \subseteq \mathbb{K}$ el sub-A-módulo generado por el conjunto $S = \{1, x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, \ldots\}$. Pruebe que si M es un A-módulo finitamente generado entonces $x^{-1} \in A$ y deduzca que $M = A$.

7. **Módulos finitamente generados, Teorema de Cayley-Hamilton y Lema de Nakayama (10 pts).** Sea $A = \mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ el anillo conmutativo de funciones continuas $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Dado un elemento $x \in [0, 1]$, definimos el ideal maximal de A asociado a x mediante
$$\mathfrak{m}_x := \{f \in A \mid f(x) = 0\}.$$
Probar que **todo** ideal maximal de A es de la forma $\mathfrak{m}_x$ para algún $x \in [0, 1]$.

   Indicación: Sea $\mathfrak{m} \subseteq \mathscr{C}$ ideal maximal. Suponer por contradicción que para todo $p \in [0, 1]$ existe $f_p \in \mathfrak{m}$ tal que $f_p(p) \neq 0$, y sea $U_p \subseteq [0, 1]$ una vecindad abierta de p tal que $f_p(x) \neq 0$ para todo $x \in U_p$. Construir, usando la compacidad[3] de $[0, 1]$, una función $g \in \mathfrak{m}$ de la forma $g = f_{p_1}^2 + \cdots + f_{p_N}^2$, y deducir que $\mathfrak{m} = \mathscr{C}$.

8. **Sucesiones exactas y cohomología (10 pts).** Sea $\varphi^\bullet : (M^\bullet, d_M^\bullet) \to (N^\bullet, d_N^\bullet)$ un morfismo de complejos de A-módulos. Pruebe que el morfismo de A-módulos $\mathrm{H}^i(\varphi^\bullet) : \mathrm{H}^i(M^\bullet) \to \mathrm{H}^i(N^\bullet),\ [m] \mapsto [\varphi^i(m)]$ está bien definido para todo $i \in \mathbb{Z}$.

---

[1] Factor de retraso: 0.7 por 1 día de retraso, 0.55 por 2 días de retraso, 0.01 por 3 días de retraso.

[2] Por definición de ideal radical, todo $x \in \sqrt{I}$ cumple que existe $n_x \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que $x^{n_x} \in I$. El própósito del problema es que probar que, bajo hipótesis de noetherianidad, existe una potencia que funciona para todos los elementos.

[3] Recordar que el hecho que $[0, 1]$ es compacto implica que para todo cubrimiento abierto $[0, 1] = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, existe un sub-cubrimiento finito $[0, 1] = U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_N}$, con $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \Lambda$.

Finalmente, debe **escoger sólamente un problema** (A o B) para resolver.

Problema A (30 pts)

El objetivo de este problema es generalizar el concepto de máximo común divisor y de mínimo común múltiplo a anillos más generales. En todo lo que sigue A es un **dominio de ideales principales** (DIP). Así, para todos $a, b \in A$ tenemos que

1. El ideal $\langle a, b\rangle$ está generado por un elemento de A, que es único salvo por multiplicación por elementos de $A^{\times}$. Decimos que dicho elemento es un **máximo común divisor** de a y b que denotamos durante este problema, a pesar de nos ser único, como $a \wedge b \in A$.

2. El ideal $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle$ está generado por un elemento de A, que es único salvo por multiplicación por elementos de $A^{\times}$. Decimos que dicho elemento es un **mínimo común múltiplo** de a y b que denotamos durante este problema, a pesar de nos ser único, como $a \vee b \in A$.

Además, decimos que $a, b \in A$ son **primos entre sí** si $a \wedge b = 1$. En particular, es automático que $a \wedge b = 1$ si y sólo si existen $x, y \in A$ tales que $ax + by = 1$ (**Lema de Bézout**).

(A1) Probar que $a \wedge b$ divide[4] tanto a como b, y que todo $d \in A$ que divide tanto a como b también divide $a \wedge b$.

(A2) Probar que $a \vee b$ es divisible por a y b, y que todo $d \in A$ divisible por a y b es divisible por $a \vee b$.

(A3) Sea $d \in A \setminus \{0\}$ que divide tanto a como b. Pruebe que $\frac{a}{d} \wedge \frac{b}{d} = \frac{a \wedge b}{d}$ y que $\frac{a}{d} \vee \frac{b}{d} = \frac{a \vee b}{d}$.

(A4) Sean $a, b, c \in A$ tales que a divide a bc y tales que $a \wedge b = 1$. Pruebe que[5] a divide a c.

(A5) Sean $a, b \in A$. Pruebe que $(a \wedge b)(a \vee b) = ab$.

Problema B (30 pts)

El objetivo de este problema es extender la noción de noetherianidad a módulos sobre un anillo A. Más precisamente, decimos que un A-módulo M es **noetheriano** si todo submódulo $N \subseteq M$ es finitamente generado. En todo lo que sigue, asumiremos que A es un anillo noetheriano.

(B1) Sea M un A-módulo finitamente generado. Pruebe que M es isomorfo a un módulo cociente A^r/P para cierto $r \in \mathbb{N}$ y cierto $P \subseteq A^r$ submódulo. Pruebe que todo submódulo de M es finitamente generado si todo submódulo de A^r es finitamente generado.

(B2) Pruebe que $M = A$ es un A-módulo noetheriano.

(B3) Sea $r \in \mathbb{N}^{\geq 2}$ fijo, y asuma que A^m es un A-módulo noetheriano para todo $m < r$. Considere

$$M_1 := \{(a, 0, \ldots, 0) \in A^r,\ a \in A\} \subseteq A^r \text{ submódulo.}$$

Considere $N \subseteq A^r$ submódulo, y pruebe que $N_1 := N \cap M_1$ es finitamente generado. Por último, considere el morfismo de A-módulos dado por $\pi : N \to A^r/M_1,\ n \mapsto [n] \overset{\text{def}}{=} n \,(\mathrm{mod}\, M_1)$, y pruebe que $\ker(\pi) = N_1$ y que $\mathrm{Im}(\pi)$ es un A-módulo finitamente generado.

(B4) Con la notación e hipótesis del ítem (B3), considere $[n_1], \ldots, [n_s]$ una familia generadora de $\mathrm{Im}(\pi)$ con $n_i \in N$ y sea $y_1, \ldots, y_m$ una familia generadora de N_1. Pruebe que $(n_1, \ldots, n_s, y_1, \ldots, y_m)$ generan a N como A-módulo.

(B5) Asumiendo como ciertos los ítems (B1)–(B4) escriba una demostración rigurosa del siguiente enunciado: **Todo módulo finitamente generado sobre un anillo noetheriano es un módulo noetheriano**.

[4] Sean $x, y \in A$. Decimos que x **divide** a y si $y = ax$ para cierto $a \in A$, i.e., $y \in \langle x\rangle$, i.e., $\langle y\rangle \subseteq \langle x\rangle$. Escribimos $\frac{y}{x} := a$ si $x \neq 0$.

[5] Equivalentemente, si $a \wedge b = 1$ y x es divisible por a y b, entonces x es divisible por ab. Así, $a \wedge b = 1$ implica que $a \vee b = ab$.

Bonus (20 puntos extra, opcional)

El objetivo de este problema es relacionar los conceptos utilizados en la demostración del Teorema de Cayley-Hamilton con la semejanza de matrices. Sea $V = \mathbb{R}^n$ y sean $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ dos matrices $n \times n$ con coeficientes reales, y recordemos que tanto A como B pueden ser usadas para dotar a V de estructura de $\mathbb{R}[X]$-módulo:

$$\text{Para todo } f \in \mathbb{R}[X] \text{ y todo } v \in V, \text{ escribimos } f(X) \cdot v := f(A)v \text{ (resp. } f(X) \cdot v := f(B)v).$$

Denotamos por V_A (resp. V_B) al $\mathbb{R}[X]$-módulo $V = \mathbb{R}^n$ dotado de la acción anterior $X \cdot v := Av$ (resp. $X \cdot v := Bv$).

1. Pruebe que $V_A \cong V_B$ como $\mathbb{R}[X]$-módulos (i.e., existe $\varphi : V_A \to V_B$ isomorfismo de $\mathbb{R}[X]$-módulos) entonces existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tal que $B = PAP^{-1}$.

2. Pruebe que si existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tal que $B = PAP^{-1}$ entonces $V_A \cong V_B$ como $\mathbb{R}[X]$-módulos.

En conclusión, el problema de semejanza de matrices en $M_n(\mathbb{R})$ es un caso particular del problema de decidir si dos $\mathbb{R}[X]$-módulos son isomorfos.