Certamen 2 Estructuras Algebraicas

Profesor: Pedro Montero, Ayudante: Cristóbal Montecino

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

Problema 1 (60 puntos)

El objetivo de este problema es estudiar explícitamente anillos de (gérmenes de) funciones continuas.

(a) Sea A un anillo noetheriano y sea $I \subseteq A$ un ideal. Probar que si $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I^n$ entonces x pertenece al ideal $xI := \{ax,\ a \in I\}$.
Indicación: Por definición, si $I = \langle a_1, \ldots, a_r \rangle$, entonces I^n está generado por[1]

$$\{P(a_1, \ldots, a_r),\ P \in A[X_1, \ldots, X_r] \text{ polinomio homogéneo de grado } n\}.$$

Notar que si $x \in I^n$ entonces existe $P_n \in A[X_1, \ldots, X_r]$ homogéneo de grado n tal que $x = P_n(a_1, \ldots, a_r)$. Considerar $J_n := \langle P_1, \ldots, P_n \rangle$ y deducir que para cierto $N \in \mathbf{N}^{\geq 1}$ existen $Q_i \in A[X_1, \ldots, X_r]$ tales que $x = Q_1(a_1, \ldots, a_r)x + \ldots + Q_N(a_1, \ldots, a_r)x$.

Solución: El caso $x = 0$ es directo, por lo que podemos asumir $x \neq 0$. Dado que A es noetheriano, $I = \langle a_1, \ldots, a_r \rangle$ es finitamente generado. Luego, siguiendo la indicación, el hecho que $x \in I^n$ para todo $n \in \mathbf{N}^{\geq 1}$ implica que existe $P_n \in A[X_1, \ldots, X_r]$ homogeneo no-nulo de grado n tal que $x = P_n(a_1, \ldots, a_r)$. En particular, existe una cadena ascendente

$$J_1 \subseteq J_2 \subseteq J_3 \subseteq \cdots \subseteq J_n \subseteq \cdots$$

de ideales de $A[X_1, \ldots, X_r]$, donde $J_n := \langle P_1, \ldots, P_n \rangle$. El teorema de la base de Hilbert implica que $A[X_1, \ldots, X_r]$ es noetheriano y por ende dicha cadena de ideales debe estabilizarse. En particular, existe $N \in \mathbf{N}^{\geq 1}$ tal que $P_{N+1} \in \langle P_1, \ldots, P_N \rangle$ o equivalentemente, existen polinomios $Q_1, \ldots, Q_N \in A[X_1, \ldots, X_r]$ tales que

$$P_{N+1}(X_1, \ldots, X_r) = Q_1(X_1, \ldots, X_r)P_1(X_1, \ldots, X_r) + \ldots + Q_N(X_1, \ldots, X_r)P_N(X_1, \ldots, X_r),$$

donde cada Q_i es no-constante pues $\mathrm{gr}(P_n) = n$. Evaluando la identidad anterior en $(a_1, \ldots, a_r)$ obtenemos

$$x = Q_1(a_1, \ldots, a_r)x + \ldots + Q_N(a_1, \ldots, a_r)x.$$

Dado que $Q_i(a_1, \ldots, a_r) \in I$, deducimos que $x \in xI$.

(b) Sea A un anillo noetheriano y sea $I \subseteq A$ un ideal. Supongamos que al menos una de las siguientes condiciones se verifica:

- (b_1) A es un dominio de integridad y $I \neq A$;
- (b_2) $I \subseteq J(A)$, donde $J(A)$ es el radical de Jacobson de A.

Probar, utilizando (a), que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = 0$.

Solución: Sea $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I^n$. El ítem (a) implica que existe $a \in I$ tal que $x = ax$. Bajo la condición (b_1) tenemos que $a \neq 1$ dado que $I \neq A$ y por ende se deduce que $x = 0$ dado que A es un dominio de integridad. Por otro lado, bajo la condición (b_2) tenemos que $a \in J(A)$ y luego $1 - a$ es un elemento invertible de A (por la caracterización del ideal de Jacobson vista en clases), de donde se deduce nuevamente que $x = 0$.

En todo lo que sigue, denotemos por $\mathscr{C} := \mathscr{C}^0([0,1]; \mathbf{R})$ al anillo de funciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbf{R}$. Dado $x_0 \in [0,1]$ un punto arbitrario, definimos el ideal maximal de $\mathscr{C}$ asociado a x_0 mediante

$$\mathfrak{m}_{x_0} := \{f \in \mathscr{C} \mid f(x_0) = 0\}.$$

(c) Probar que **todo** ideal maximal de $\mathscr{C}$ es de la forma $\mathfrak{m}_{x_0}$ para algún $x_0 \in [0,1]$.
Indicación: Sea $\mathfrak{m} \subseteq \mathscr{C}$ ideal maximal. Suponer por contradicción que para todo $p \in [0,1]$ existe $f_p \in \mathfrak{m}$ tal que $f_p(p) \neq 0$, y sea $U_p \subseteq [0,1]$ una vecindad abierta de p tal que $f_p(x) \neq 0$ para todo $x \in U_p$. Construir, usando la compacidad[2] *de $[0,1]$, una función $g \in \mathfrak{m}$ de la forma $g = f_{p_1}^2 + \cdots + f_{p_N}^2$, y deducir que $\mathfrak{m} = \mathscr{C}$.*

[1] e.g. si $I = \langle a, b \rangle$ entonces $I^3 = \langle a^3, a^2b, ab^2, b^3 \rangle$

[2] Recordar que el hecho que $[0,1]$ es compacto implica que para todo cubrimiento abierto $[0,1] = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, existe un sub-cubrimiento finito $[0,1] = U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_N}$, con $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \Lambda$.

Solución: Sea $\mathfrak{m} \subseteq \mathscr{C}$ un ideal maximal, y supongamos por contradicción que $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_p$ para todo $p \in [0,1]$, i.e., que para todo $p \in [0,1]$ existe $f_p \in \mathfrak{m}$ tal que $f_p(p) \neq 0$. Por continuidad, existe $U_p \subseteq [0,1]$ vecindad abierta de p tal que $f_p(x) \neq 0$ para todo $x \in U_p$. Además, por nuestra suposición, tenemos que los U_p forman un cubrimiento abierto de $[0,1]$, i.e., $[0,1] = \bigcup_{p\in[0,1]} U_p$. Dado que $[0,1]$ es compacto, podemos extraer un subcubrimiento finito de dicho cubrimiento. Concretamente, existen $p_1, \ldots, p_N$ tales que $[0,1] = U_{p_1} \cup \cdots \cup U_{p_N}$. Luego, si definimos

$$g(x) := f_{p_1}^2(x) + f_{p_2}^2(x) + \ldots + f_{p_N}^2(x)$$

tenemos por un lado que $g \in \mathfrak{m}$ puesto que $f_{p_i} \in \mathfrak{m}$, y además $g(x) > 0$ para todo $x \in [0,1]$. De esto último (y los cursos de cálculo) deducimos que $1/g \in \mathscr{C}$ es una función continua y por ende $1 = g \cdot \frac{1}{g} \in \mathfrak{m}$, i.e., $\mathfrak{m} = \mathscr{C}$ lo cual es una contradicción. Finalmente, concluímos que existe un $x_0 \in [0,1]$ tal que $f(x_0) = 0$ para todo $f \in \mathfrak{m}$, lo que equivale a que $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_{x_0}$. Dado que ambos son ideales maximales, deducimos que $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{x_0}$.

Sea $p \in (0,1)$ un punto interior que fijaremos para el resto del problema, y consideremos $I \subseteq \mathscr{C}$ al ideal de funciones continuas que se anulan en una vecindad abierta de p. Explícitamente,

$$I := \{f \in \mathscr{C} \text{ tal que existe } U \subseteq [0,1] \text{ vecindad abierta de } p \text{ tal que } f(x) = 0 \text{ para todo } x \in U\}.$$

Definimos $A_p := \mathscr{C}/I$, el anillo de gérmenes de funciones continuas en p (i.e., $[f] = [g]$ en A_p si f y g coinciden en una vecindad abierta de p). Recordemos que A_p es un anillo local con único ideal maximal dado por

$$\eta := \mathfrak{m}_p/I \overset{\text{def}}{=} \{\text{gérmenes de funciones continuas } f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ tales que } f(p) = 0\},$$

y cuerpo residual $A_p/\eta \cong \mathbf{R}$. Además, $\eta^r = \mathfrak{m}_p^r/I$ para todo $r \in \mathbf{N}^{\geq 1}$.

(d) Con la notación anterior, probar que $\mathfrak{m}_p^2 = \mathfrak{m}_p$, y en particular $\eta^2 = \eta$.
Indicación: Probar que si $f \in \mathscr{C}$ entonces $f = g^2 - h^2$, donde $g = \sqrt{\text{máx}(f,0)}$ y $h = \sqrt{\text{máx}(-f,0)}$. Justificar brevemente el hecho que $g, h \in \mathscr{C}$.

Solución: Sea $f \in \mathscr{C}$ función continua. Sabemos que el máximo entre dos funciones continuas es continua, por lo que $\text{máx}(f,0)$ y $\text{máx}(-f,0)$ son continuas. Dado que ambas son funciones no-negativas, tenemos que $g := \sqrt{\text{máx}(f,0)}$ y $h := \sqrt{\text{máx}(-f,0)}$ son continuas. Además,

$$g^2(x) - h^2(x) = \text{máx}(f,0) - \text{máx}(-f,0) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -(-f(x)) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

de donde obtenemos $f = g^2 - h^2$. Además, si $f(p) = 0$ (i.e., $f \in \mathfrak{m}_p$) entonces $g, h \in \mathfrak{m}_p$. En particular, la igualdad $f = g^2 - h^2$ para toda $f \in \mathfrak{m}_p$ implica que $\mathfrak{m}_p \subseteq \mathfrak{m}_p^2$. Dado que siempre se cumple que $\mathfrak{m}_p^2 \subseteq \mathfrak{m}_p$, deducimos que $\mathfrak{m}_p = \mathfrak{m}_p^2$. Finalmente, $\eta^2 \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{m}_p^2/I = \mathfrak{m}_p/I \overset{\text{def}}{=} \eta$, gracias al cálculo anterior.

(e) Deducir, a partir de los puntos anteriores (a)–(d), que el anillo local A_p **no** es noetheriano.

Solución: Dado que A_p es un anillo local, tenemos que $J(A_p) = \eta$ (por definición de radical de Jacobson). En particular, el ítem (b_2) implica que si A_p fuese noetheriano entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} \eta^n = 0$. Sin embargo, el ítem (d) implica (inductivamente) que $\eta^n = \eta$ para para todo $n \in \mathbf{N}^{\geq 1}$ y por ende $\bigcap_{n=1}^{\infty} \eta^n = \eta \neq 0$, una contradicción.

(f) Deducir, a partir de (d), que η **no** es un A_p-módulo finitamente generado.

Solución: Si η fuese finitamente generado, entonces el Lema de Nakayama aplicado al anillo local A_p y al A_p-módulo $M := \eta$ implicaría que $\eta M = M$ si y sólo si $M = 0$. Sin embargo, esta última identidad equivale por definición a $\eta^2 = \eta$, que se verificó en (d). Dado que $\eta \neq 0$, deducimos que η no es finitamente generado.

Problema 2 (40 puntos)

Sea A un anillo no-nulo. El objetivo de este problema es estudiar algunas propiedades de las sucesiones exactas. Para ello, consideremos

$$M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3 \longrightarrow 0 \qquad (\star)$$

una sucesión de A-módulos (no necesariamente exacta). Además, dado un A-módulo N tenemos

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(M_3, N) \xrightarrow{\psi^*} \text{Hom}_A(M_2, N) \xrightarrow{\varphi^*} \text{Hom}_A(M_1, N) \qquad (\star\star)$$

sucesión de A-módulos inducida por los respectivos pullback.

(a) Probar que si $(\star\star)$ es exacta para todo A-módulo N, entonces la sucesión $(\star)$ es exacta también.
Indicación: Para probar que $\ker(\psi) \subseteq \mathrm{Im}(\varphi)$*, considerar* $N := M_2/\mathrm{Im}(\varphi)$ *y* $g : M_2 \twoheadrightarrow N$ *la proyección al cociente. Probar que* $g \in \mathrm{Im}(\psi^*)$ *y deducir que* $\ker(\psi) \subseteq \mathrm{Im}(\varphi)$*. La inclusión* $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \ker(\psi)$ *así como la igualdad* $\mathrm{Im}(\psi) = M_3$ *se prueban de manera análoga escogiendo* N *y* $f : M_3 \to N$ *convenientes (e.g. identidad o proyección a un cociente).*

Solución: Veamos primero que $\ker(\psi) \subseteq \mathrm{Im}(\varphi)$. Para esto, consideremos $N := M_2/\mathrm{Im}(\varphi)$ y sea $g : M_2 \twoheadrightarrow N \overset{\text{def}}{=} M_2/\mathrm{Im}(\varphi)$ la proyección al cociente. Por exactitud de $(\star\star)$ tenemos que $\mathrm{Im}(\psi^*) = \ker(\varphi^*)$. Dado que $\varphi^*(g) \overset{\text{def}}{=} g \circ \varphi = 0$ (pues g se anula precisamente en $\mathrm{Im}(\varphi)$) tenemos que $g \in \mathrm{Im}(\psi^*)$, i.e., $g = f \circ \psi$ para cierta $f : M_3 \to N$. En particular, $\ker(\psi) \subseteq \ker(g) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Im}(\varphi)$, que es lo que se quería probar.

Para la inclusión $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \ker(\psi)$ consideramos $N := M_3$ y $f : M_3 \to N \overset{\text{def}}{=} M_3$ la identidad Id_{M_3}. Así, la relación $\mathrm{Im}(\psi^*) = \ker(\varphi^*)$ implica que $\varphi^*(\psi^*(f)) = 0$, i.e., $f \circ \psi \circ \varphi = \psi \circ \varphi = 0$, de donde deducimos $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \ker(\psi)$.

Finalmente, para probar que $\mathrm{Im}(\psi) = M_3$ consideramos $N := M_3/\mathrm{Im}(\psi)$ y $f : M_3 \twoheadrightarrow N \overset{\text{def}}{=} M_3/\mathrm{Im}(\psi)$ la proyección al cociente. Dado que $\ker(\psi^*) = 0$, tenemos que la identidad $\psi^*(f) \overset{\text{def}}{=} f \circ \psi = 0$ (pues f se anula precisamente en $\mathrm{Im}(\psi)$) implica que $f = 0$. En otras palabras, $N = 0$ y luego $M_3 = \mathrm{Im}(\psi)$.

Finalmente, consideremos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & M_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "f'"] & N_2 \arrow[r, "g'"] & N_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

diagrama conmutativo de A-módulos[3], donde las **filas** son sucesiones exactas.

(b) Probar que si dos de los morfismos de A-módulos α, β o γ son isomorfismos, entonces el tercero también[4].

Solución: El lema de la serpiente implica que existe una sucesión exacta inducida

$$0 \to \ker(\alpha) \to \ker(\beta) \to \ker(\gamma) \xrightarrow{\delta} \mathrm{coker}(\alpha) \to \mathrm{coker}(\beta) \to \mathrm{coker}(\gamma) \to 0. \qquad (\dagger)$$

Luego, si α y β son isomorfismos entonces son inyectivos (y luego $\ker(\alpha) = 0$, $\ker(\beta) = 0$) y sobreyectivos (y luego $\mathrm{coker}(\alpha) = 0$, $\mathrm{coker}(\beta) = 0$). Así, la sucesión exacta $(\dagger)$ se reduce a

$$0 \to 0 \to 0 \to \ker(\gamma) \to 0 \to 0 \to \mathrm{coker}(\gamma) \to 0,$$

y en particular $\ker(\gamma) = 0$ y $\mathrm{coker}(\gamma) = 0$ por exactitud[5]. Así, γ es un isomorfismo. De manera completamente análoga deducimos que si α y γ (resp. β y γ) son isomorfismos, entonces β (resp. α) también.

[3] i.e., $\beta \circ f = f' \circ \alpha$ y $\gamma \circ g = g' \circ \beta$.

[4] Explícitamente, probar que si α y β (resp. α y γ, resp. β y γ) son isomorfismos, entonces γ (resp. β, resp. α) también.

[5] Si $0 \to M \xrightarrow{f} N \to 0$ es exacta, entonces f es un isomorfismo.

Bonus (15 puntos)

El objetivo de este problema es realizar algunos cálculos explícitos relacionados al producto tensorial de módulos.

(i) Calcular $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$.

Solución: Dado que el producto tensorial está generado por *tensores simples* de la forma $x \otimes y$, basta analizar $x \otimes y$ para todos $x, y \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Todo $x \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ es la clase de equivalencia de cierto $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$. En particular, $qx = q\left[\frac{p}{q}\right] = [p] = 0$ en $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Luego, $x \otimes y = x \otimes \frac{q}{q}y = qx \otimes \frac{1}{q}y = 0$. Así, dado que $x \otimes y = 0$ para todos $x, y \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, deducimos que $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = 0$.

Finalmente, probemos que para $n, m \in \mathbf{N}^{\geq 1}$, se tiene que $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$, donde $d = \operatorname{mcd}(n, m)$. Para esto, notar que (la clase de) 1 genera $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ y $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ como $\mathbf{Z}$-módulo, y luego $[1]_n \otimes [1]_m$ genera $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$.

(ii) Probar que el orden de $[1]_n \otimes [1]_m$ en $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$ es a lo más d y deducir que $|(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})| \leq d$.

Solución: Notamos que $n([1]_n \otimes [1]_m) = [n]_n \otimes [1]_m = 0$ y que $m([1]_n \otimes [1]_m) = [1]_n \otimes [m]_m = 0$, por $\mathbf{Z}$-bilinealidad. Así, el orden ℓ del generador del grupo abeliano cíclico finito $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ divide n y m, y por ende ℓ divide d. En particular, $\ell \leq d$.

(iii) Construir explícitamente una aplicación $\mathbf{Z}$-lineal sobreyectiva $f : (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \twoheadrightarrow \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$ y deducir que $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$.

Solución: Dado que d divide n y m, las aplicaciones $\mathbf{Z}$-lineales

$$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \twoheadrightarrow \mathbf{Z}/d\mathbf{Z},\ [x]_n \mapsto [x]_d \text{ y } \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \twoheadrightarrow \mathbf{Z}/d\mathbf{Z},\ [y]_m \mapsto [y]_d$$

están bien definidas y son sobreyectivas. En particular, la aplicación $\mathbf{Z}$-lineal dada por

$$f : (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \twoheadrightarrow \mathbf{Z}/d\mathbf{Z},\ [x]_n \otimes [y]_m \mapsto [xy]_d$$

está bien definida y es sobreyectiva. De lo anterior deducimos que $\ell \geq d$, y así $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$.