Ayudantia #4: Subgrupos de Sylow

MAT-214: Estructuras Algebraicas

Semestre 2026-1

Profesor: Pedro Montero **Ayudante:** Madeline Castro

P1) (Clasificación de grupos con todos sus p-Sylows normales) El objetivo de este problema es demostrar que todo grupo finito G tal que $|G| = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ y que $n_{p_i} = 1$ para todo $i \in \{1, \cdots, k\}$ puede ser escrito como un producto directo. Para eso haremos uso del siguiente resultado elemental:

Propuesto

Sea G un grupo y $H, K \leq G$. Muestre que $HK = \{hk \,|\, h \in H, k \in K\} \leq G \iff HK = KH$.

(a) Suponga que G es un grupo y $H, K \leq G$ tal que:

- H y K son normales en G.
- $H \cap K = \{e\}$

Muestre que $HK = H \times K$

(b) Muestre que un grupo finito G es generado por la union de todos sus p-Sylows.

(c) Sea G un grupo finito tal que $|G| = p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}$ y $n_{p_i} = 1$ para todo $i \in \{1, \cdots, s\}$. Pruebe que $G \simeq P_1 \times \cdots \times P_s$ con P_i el grupo de p_i-Sylow correspondiente.

P2) Aplicaciones de p-Sylow

(a) Pruebe que todo grupo G de orden 15 no es simple, pero es ciclico.

(b) Sea $p \neq 2$, muestre que todo grupo de orden $2p$ es el grupo ciclico C_p, o bien el grupo diedral D_{2p}.

(c) Sea $n = \{105, 640, 945\}$, muestre que todo grupo G de cualquiera de estos ordenes no puede ser simple.