



Ayudantia #3: Acciones de Grupos
MAT-214: Estructuras Algebraicas
Semestre 2026-1

Profesor: Pedro Montero **Ayudante:** Madeline Castro

P1) Considere la acción de $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^t A = I_n\}$ en \mathbb{R}^n dada por $(A, v) \mapsto Av$.

- (a) Muestre que esta acción es fiel y transitiva.
- (b) Sea G un grupo arbitrario que actúa sobre X . Probar que para todo $x, y \in X$ tal que existe $g \in G$ de manera que $y = g \cdot x$ entonces $G_y = gG_xg^{-1}$.
- (c) Pruebe que si $v \in \mathbb{R}^n$ es no-nulo entonces $O_n(\mathbb{R})_v \simeq O_{n-1}(\mathbb{R})$. Mostrar que $O_n(\mathbb{R})/O_{n-1}(\mathbb{R})$ está en biyección con S^{n-1} la esfera unitaria en \mathbb{R}^n .

P2) Sea p un número primo, considere el subgrupo de $GL_2(\mathbb{F}_p)$ dado por

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{F}_p) \right\}$$

- (a) Calcule $|GL_2(\mathbb{F}_p)|$
- (b) Sea X el conjunto de todos los subgrupos de $GL_2(\mathbb{F}_p)$. Use el teorema de Orbita-Estabilizador junto a la acción $GL_2(\mathbb{F}_p) \curvearrowright X$ dada por conjugación para mostrar que $|\{gHg^{-1} \mid g \in GL_2(\mathbb{F}_p)\}| = p + 1$. Muestre que este conjunto está en biyección con $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$.
- (c) Usando técnicas similares a la anterior muestre que el número de clases de conjugaciones de $x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ es de $p^2 - 1$. Analice $[N_g(H) : C_g(x)]$.

P3) Lema de Burnside: Sea G un grupo finito y X un conjunto finito, sea $G \curvearrowright X$ y N el número total de órbitas de la acción, mostrar que

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$