



Ayudantia #2: Clases laterales, Subgrupos normales y Cocientes
MAT-214: Estructuras Algebraicas
Semestre 2026-1

Profesor: Pedro Montero **Ayudante:** Madeline Castro

P1) Recordamos que $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$.

- (a) Muestre que $SL_n(\mathbb{R})$ es un subgrupo normal de $GL_n(\mathbb{R})$
- (b) Consideremos el conjunto $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) = \{A \cdot SL_n(\mathbb{R}) \mid A \in GL_n(\mathbb{R})\}$, muestre que si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ es tal que $\det A = r$ entonces

$$A \cdot SL_n(\mathbb{R}) = \{B \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det B = r\}$$

Haga un resultado similar para el conjunto de clases laterales derechas $SL_n(\mathbb{R}) \backslash GL_n(\mathbb{R})$, muestre que $SL_n(\mathbb{R})$ es normal de esta forma.

- (c) Muestre (sin usar Teorema del Isomorfismo) que $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^\times$.

Propuesto (Algebra Exemplar, Sérgio Tadao pp. 127): Ahora consideremos el espacio de matrices unitriangulares superiores $UT_n(\mathbb{R})$ dado por:

$$UT_n(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 1 & * & \cdots & * & * \\ & \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{R}) \right\}$$

Considere tambien para $r \in \mathbb{N}$ el subgrupo $UU_r \subseteq UT_n$ dado por $UU_r = \{(a_{ij}) \in UT_n(\mathbb{R}) \mid a_{ij} = 0, j - r < i < j\}$ que en palabras simples "cancela" las primeras $r - 1$ diagonales superiores de la matriz, por ejemplo si $n = 4$:

$$UU_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- Muestre que $UT_n(\mathbb{R}) \leq GL_n(\mathbb{R})$ pero que no es un subgrupo normal de este, exhiba un ejemplo.
- Muestre que $UU_r(\mathbb{R})$ es un subgrupo normal de $UT_n(\mathbb{R})$ *Indicación:* En MAT-210 demostramos que $A \in UU_r$ si y solo si $(A - I_n)^{n-r+1} = 0_n$.

P2) (Clases Laterales)

- (a) Sea G un grupo finito de orden 25. Muestre que G tiene a lo más 6 subgrupos de orden 5.
- (b) Muestre que si $N \leq G$ y $[G : N] = 2$ entonces N es normal.

P3) Considere V el grupo de Klein definido en la ayudantía anterior, sabemos que $V \leq S_4$ mediante $V = \{(1), (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$.

- (a) Muestre que V es un subgrupo normal de S_4 y de A_4 . ¿Cuanto vale $[A_4 : V]$ y $[S_4 : V]$? Usando esto de una forma explicita para el grupo A_4/V .
- (b) Sea $X = \{P_1, P_2, P_3\}$ el conjunto de todas las posibles forma de partir $\{1, 2, 3, 4\}$ en dos conjuntos, en particular considere que:

$$P_1 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$$

$$P_2 = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$$

$$P_3 = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$$

Finalmente considere $\text{Sym}(X) \simeq 3$ el grupo de permutaciones asociados a estos puntos, muestre que $S_4/V \simeq S_3$.