Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de matemáticas

Ayudantía 4 MAT214

16 de abril 2024

Mateo Hidalgo

1. Recuerdo

Teorema 2.3.5 (Sylow, 1872). Sea G un grupo y sea p un número primo tal que p divide $|G|$. Escribamos $|G| = p^\alpha m$ con $p \nmid m$. Entonces

1. G contiene un p-sub-grupo de Sylow.
2. Todo p-sub-grupo de G está contenido en algún p-sub-grupo de Sylow.
3. Todos los p-sub-grupos de Sylow son conjugados en G.
4. Sea n_p el número de p-sub-grupos de Sylow de G. Entonces $n_p \mid m$. $n_p \equiv 1 \mod p$.

El centralizador de un elemento $x \in G$ es $C_G(x) = \{g \in G \mid gx = xg\}$

2. Ejercicios cortos

1. Sea G un grupo con $H, K \leqslant G$. Muestre que HK es un subgrupo de G si y solo si $HK = KH$

   Solución: Asuma primero que $HK = KH$ y sea $a, b \in HK$. Claramente $HK \neq \varnothing$. Probemos $ab^{-1} \in HK$ así que HK es un subgrupo por el criterio del subgrupo. Sea

   $$a = h_1 k_1 \quad \text{y} \quad b = h_2 k_2,$$

   para algunos $h_1, h_2 \in H$ y $k_1, k_2 \in K$. Entonces $b^{-1} = k_2^{-1} h_2^{-1}$, so $ab^{-1} = h_1 k_1 k_2^{-1} h_2^{-1}$. Sean $k_3 = k_1 k_2^{-1} \in K$ y $h_3 = h_2^{-1}$. Entonces $ab^{-1} = h_1 k_3 h_3$. Ya que $HK = KH$,

   $$k_3 h_3 = h_4 k_4, \quad \text{para algunos } h_4 \in H, \quad k_4 \in K.$$

   Por tanto $ab^{-1} = h_1 h_4 k_4$, y ya que $h_1 h_4 \in H, k_4 \in K$, obtenemos $ab^{-1} \in HK$, como queríamos. Conversamente, asumamos que HK es un subgrupo de G. Ya que $K \leqslant HK$ y $H \leqslant HK$, por la clausura de subgrupos, $KH \subseteq HK$. Para mostrar la otra inclusión, sea $hk \in HK$ arbitrario. Ya que HK se asume un subgrupo, escriba $hk = a^{-1}$, para algún $a \in HK$. Si $a = h_1 k_1$, entonces

   $$hk = (h_1 k_1)^{-1} = k_1^{-1} h_1^{-1} \in KH,$$

   completando la demostración.

2. Sea G un grupo, $N \leqslant G$ un subgrupo de G. Si $N \leqslant Z(G)$ y G/N es cíclico entonces $G = Z(G)$. en particular si $G/Z(G)$ es cíclico entonces G es abeliano.

   Solución: Sea gN un generador de G/N. Ya que $N \leqslant Z(G)$ claramente $N \subseteq C_G(g)$. Por definición, $g \in C_G(g)$ también. Como $N \leqslant Z(G)$ entonces N es normal tanto en G como en $C_G(g)$. De la correspondencia entre

subgrupos y grupos en el cociente (cf. página 25 del apunte):
Sea $H \trianglelefteq G$ sub-grupo normal y sea $p : G \to G/H$ la proyección canónica. Podemos verificar que las aplicaciones

$$\begin{aligned} \{\text{sub-grupos de } G/H\} &\longrightarrow \{\text{ sub-grupos de } G \text{ que contienen } H\} \\ K' &\longmapsto p^{-1}\left(K'\right) \\ p(K) &\leftarrow\!\shortmid K \end{aligned}$$

son biyecciones, inversas la una de la otra. Concluimos que $C_G(g)/N = G/N$ (ambos contienen a gN) y $C_G(g) = G$, y por tanto $g \in Z(G)$. Así $Z(G)/N = G/N$ (ambos son generados por gN) y de nuevo por la correspondencia anterior, $Z(G) = G$.

3. Sea G un grupo, muestre que si $|G| = pq$ para p, q primos entonces o bien G es abeliano o bien $Z(G) = \{e\}$

   Solución: Como $Z(G) \leqslant G$ por el teorema de Lagrange tenemos que $|Z(G)| \mid |G|$ así que $|Z(G)| \in \{1, p, q, pq\}$. Si $|Z(G)| = 1$ estamos listos. Si $|Z(G)| = pq$ entonces $Z(G) = G$, así que G sería abeliano y estamos listos. Si $|Z(G)| = p$ o $|Z(G)| = q$ entonces $Z(G)$ es cíclico así que G es abeliano. Concluimos.

4. Sea $G = S_n$ y sea $i \in \{1, \ldots, n\}$ muestre que $G_i \simeq S_{n-1}$

   Solución: Por definición
   $$\mathrm{Stab}_{S_n}(i) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i\}.$$

   Removiendo de cada función en este conjunto al par (i, i) (recordar que podemos ver una función $f : A \to B$ como un subconjunto de $A \times B$), obtenemos todas las biyecciones de $\{1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}$ en sí mismo, queda como ejercicio ver que esta asignación es efectivamente un morfismo biyectivo, probando así que $\mathrm{Stab}_{S_n}(i) \simeq S_{\{1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n\}}$. Sabemos que S_A depende solo de la cardinalidad de A, así que la conclusión sigue al notar que $\{1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}$ tiene $n-1$ elementos. Concluimos.

5. Suponga que G es un grupo con subgrupos H, K tales que

   a) H y K son normales en G y

   b) $H \cap K = \{e\}$

   Entonces $HK \cong H \times K$.

   Solución: Por la hipótesis a) tenemos que HK es un subgrupo de G. Sea $h \in H$ y sea $k \in K$. Dado que $H \trianglelefteq G, k^{-1}hk \in H$, tenemos $h^{-1}\left(k^{-1}hk\right) \in H$. Similarmente, $\left(h^{-1}k^{-1}h\right)k \in K$. Dado que $H \cap K = 1$ sigue que $h^{-1}k^{-1}hk = 1$, es decir, $hk = kh$ así que cada elemento de H conmuta con cada elemento de K. Es claro que cada elemento de HK puede ser escrito de forma única como un producto hk, con $h \in H$ y $k \in K$. Así el mapa
   $$\begin{aligned} \varphi : HK &\to H \times K \\ hk &\mapsto (h, k) \end{aligned}$$

   está bien definido. Para ver que φ es un morfismo notar que si $h_1, h_2 \in H$ y $k_1, k_2 \in K$, entonces h_2 y k_1 conmutan. Por tanto
   $$\left(h_1k_1\right)\left(h_2k_2\right) = \left(h_1h_2\right)\left(k_1k_2\right)$$

   y el último producto es la única forma de escribir $\left(h_1k_1\right)\left(h_2k_2\right)$ en la forma hk con $h \in H$ y $k \in K$. Esto muestra que
   $$\begin{aligned} \varphi\left(h_1k_1h_2k_2\right) &= \varphi\left(h_1h_2k_1k_2\right) \\ &= \left(h_1h_2, k_1k_2\right) \\ &= \left(h_1, k_1\right)\left(h_2, k_2\right) = \varphi\left(h_1k_1\right)\varphi\left(h_2k_2\right) \end{aligned}$$

   así que φ es un morfismo. El morfismo φ es claramente biyectivo, por lo que podemos concluir.

6. Sea G un grupo. Por cada p_i primo dividiendo a $|G|$ sea P_i un p_i-subgrupo de Sylow de orden $p_i^{\alpha_i}$. Muestre que G está generado por la unión de los P_i.

   Solución: Sea H el generado por la unión de los P_i. Cada P_i es un subgrupo de H, por lo que H es divisible por cada $p_i^{\alpha_i}$, así que necesariamente $|G| \mid |H|$ y por tanto $G = H$.

3. Clasificación Grupos

1. Clasificar grupos de orden $2p$ con p primo impar.

   Solución: Sea P un p-grupo de Sylow de G y Q un 2-subgrupo de Sylow. Por cardinalidad, tenemos que P y Q son cíclicos, digamos $P = \langle x \rangle$ y $Q = \langle y \rangle$. Como los subgrupos de índice 2 son normales, tenemos $\langle x \rangle \trianglelefteq G$ así que $y^{-1}xy = x^t$ para algún $1 \leqslant t \leqslant p-1$. Entonces $x = y^{-2}xy^2 = x^{t^2}$, así que p divide a $t^2 - 1 = (t+1)(t-1)$, por tanto p divide o bien a $t-1$ o bien a $t+1$, es decir, o bien $t = 1$ o bien $t = p-1$. No es difícil ver que entonces el hecho de que G esté generado por x, y (pues está generado por la unión de sus subgrupos de Sylow, como probamos antes) y la ecuación $y^{-1}xy = x^t$ determinan la tabla de Cayley del grupo, en particular, determinan que G será bien el grupo cícilo de $2p$ elementos o el grupo diedral de $2p$ elementos.

2. Clasificar, módulo isomorfismo, todos los grupos G de orden n para $1 \leqslant n \leqslant 11$.

   Solución:

   - $n = 1$. Es claro que el único grupo de orden 1 es $G = \{e\}$
   - $n = 2, 3, 5, 7, 11$. Por la Observación 2.1.18 del apunte, todo grupo de orden n primo es isomorfo a el grupo cíclico $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
   - $n = 4, n = 9$. Por tener orden el cuadrado de un primo, necesariamente son abelianos. Para $n = 4$ tenemos que G puede ser isomorfo a $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ o a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ellos no son isomorfos entre sí pues uno tiene un elemento de orden 4 y el otro no. Para $n = 9$ tenemos que G puede ser isomorfo a $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ o a $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, ellos no son isomorfos entre sí pues uno tiene un elemento de orden 9 y el otro no.
   - $n = 6$. Si G es abeliano entonces $G \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (isomorfos por tener mismos factores invariantes). Si G no es abeliano entonces como es de orden $2p$ con p primo por el lema tenemos que es isomorfo al grupo diedral de 6 elementos (que a su vez es isomorfo al grupo simétrico de 6 elementos)
   - $n = 8$. Si G es abeliano entonces G es isomorfo o bien a $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ o bien a $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ o bien a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, donde cada opción es no-isomorfa pues las primeras dos de ellas no tienen elementos de orden 8 y la última no tiene elementos de orden 4. Si G es no abeliano entonces los elementos de $G \backslash \{e\}$ tienen orden 2 o 4. Si todos los elementos de $G \backslash \{e\}$ tienen orden 2 entonces G es abeliano (ejercicio fácil). Así que hay un elemento x de orden 4.

     Primer caso. Supongamos que hay un elemento y de orden 2, tal que $y \notin \langle x \rangle_4$. En este caso todos los elementos
     $$x^k y^l, \; k = 0, 1, 2, 3, \; l = 0, 1$$
     son diferentes. Dado que $[G : \langle x \rangle_4] = 2$ el subgrupo $\langle x \rangle_4$ es normal en G. Entonces $y^{-1}xy = x^k$, donde $k = 1$ o $k = 3$ (esto pues, por ejemplo, conjugar es un isomorfismo, así que manda el elemento x de orden 4 en otro elemento de orden 4). Si $k = 1$ entonces G es un grupo abeliano, así que $k = 3$, pero entonces G es el grupo diedral de 8 elementos.

     Segundo caso. Suponga que todos los $y \notin \langle x \rangle_4$, tienen $\text{ord}(y) = 4$. Entonces $y^2 \in \langle x \rangle_4$ y esto da que $y^2 = x^2$. Así, $z = x^2 = y^2 \in Z(G)$. Similarmente al primer caso, uno muestra que $y^{-1}xy = x^3 = zx$. Ahora si ponemos $z = -1, x = i, y = j$ y $xy = k$ tendremos el grupo de cuaterniones de 8 elementos *https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion_group*.
   - $n = 10$. Usar el lema. O bien G es el grupo diedral de 10 elementos o bien es el grupo cíclico de 10 elementos.

4. Clasificación Grupos Abelianos

1. Para cada $n \in \{100, 576, 1155, 42875, 2704\}$ de el número de grupos abelianos no-isomorfos de orden n.

   Solución: Sea G grupo abeliano con $|G| = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$ descomposición en factores primos, como cada subgrupo es normal, en particular cada p_i-subgrupo de Sylow P_i es normal, así que $G \simeq P_1 \times \cdots \times P_s$. Como P_i es un grupo abeliano de orden $p_i^{\alpha_i}$ es claro que

   $$P_i \simeq \mathbb{Z}/p_i^{\beta_1}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_i^{\beta_r}\mathbb{Z}$$

   con $1 \geqslant \beta_1 \geqslant \cdots \geqslant \beta_r$, $\beta_1 + \cdots + \beta_r = \alpha_i$ y cada elección de los β_j da un grupo distinto (pues da factores invariantes distintos). De esta forma, P_i tiene tantas clases de isomorfismo como *particiones* hay del número α_i. Así, como $576 = 2^6 3^2$ y 6 presenta las 11 particiones:

   $$\begin{aligned}
   6 &= 6 \\
   6 &= 1+1+1+1+1+1 \\
   6 &= 1+1+1+1+2 \\
   6 &= 1+1+1+3 \\
   6 &= 1+1+4 \\
   6 &= 1+5 \\
   6 &= 1+1+2+2 \\
   6 &= 2+2+2 \\
   6 &= 3+3 \\
   6 &= 1+2+3 \\
   6 &= 4+2
   \end{aligned}$$

   y 2 presenta solo 2 particiones, tenemos que hay $11 \cdot 2 = 22$ clases de isomorfismo para grupos abelianos de orden 576. Para 1155 tenemos $1155 = 11^2 \cdot 5$ así que hay 2 clases de isomorfismo. Para 42875 tenemos $42875 = 5^3 \cdot 7^3$ y como 3 presenta las 3 particiones $3 = 3$, $3 = 1+1+1$, $3 = 1+2$ tenemos 9 clases de isomorfismo. Para 2704 tenemos $2704 = 2^4 \cdot 13^2$, como 4 presenta 6 particiones $4 = 4 = 1+1+1+1 = 1+1+2 = 2+2 = 3+1$ así tenemos $2 \cdot 6 = 12$ clases de isomorfismo.

2. Determinar todos los grupos abelianos de orden 270.

   Solución: Notar que $270 = 3^3 \cdot 2 \cdot 5$. Dado que estamos buscando grupos abelianos finitos, por el teorema de estructura de grupos abelianos finitamente generados, se tendrá que

   $$G \cong \prod_{i=1}^{s} \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}$$

   donde los enteros $d_1, \dots, d_n$ son tales que $1 < d_1 | \cdots | d_s$. Por ende, los grupos abelianos de orden 360 son aquellos que vienen determinados por las secuencias $1 < d_1 | \cdots | d_s$ de tal forma que $d_1 \cdots d_s = 270$. Entonces tenemos los siguientes casos:

   a) $s = 1 : d_1 = 270$.
   b) $s = 2$: Tenemos solo la posibilidad $d_1 = 3, d_2 = 90$.
   c) $s = 3$: Solo es posible $d_1 = 3$, $d_2 = 3$, $d_3 = 30$

   Notar que los anteriores son los únicos casos posibles, pues en otro caso no se cumple la condición de divisibilidad. De esta forma existen solo 3 grupo abelianos de orden 270, los cuales correspondes, salvo isomorfismo a

$$\mathbb{Z}/270\mathbb{Z}$$
$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/90\mathbb{Z}$$
$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$$

5. Teorema de Sylow

1. Probar que si cada subgrupo de Sylow P_i de un grupo G es normal en G entonces $G \simeq P_1 \times \cdots \times P_s$.
   Solución: Mostremos inductivamente que para todo $t, 1 \leqslant t \leqslant s$ tenemos

   $$P_1 P_2 \cdots P_t \cong P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_t.$$

   El caso $t = 1$ es trivial.
   Notemos que todo P_i es normal en G así que $P_1 \cdots P_t$ es un subgrupo de G. Sea H el producto $P_1 \cdots P_{t-1}$ y sea $K = P_t$, así por inducción $H \cong P_1 \times \cdots \times P_{t-1}$. En particular, $|H| = |P_1| \cdot |P_2| \cdots |P_{t-1}|$. Dado que $|K| = |P_t|$, los ordenes de H y K son relativamente primos. El teorema de Lagrange implica que $H \cap K = 1$. Por definición, $P_1 \cdots P_t = HK$, por tanto:

   $$HK \cong H \times K = (P_1 \times \cdots \times P_{t-1}) \times P_t \cong P_1 \times \cdots \times P_t$$

   lo que completa la inducción. Ahora tomamos $t = s$ para obtener lo pedido.

2. Muestre que si $|G| \in \{132, 6545, 1365\}$ entonces G no es simple.

   Solución:

   - $|G| = 132$. Notar que $|G| = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$. Asumamos que G no es simple y lleguemos a una contradicción. Por simplicidad, sabemos que $n_{11} > 1, n_3 > 1$, y $n_2 > 1$. Por el teorema de Sylow, necesariamente $n_{11} = 12$. Además, $n_3 \geqslant 4$ y $n_2 \geqslant 3$.
     Notar lo siguiente
     a) La intersección de dos 11-subgrupos de Sylow es trivial.
     b) La intersección de dos 3-subgrupos de Sylow es trivial.
     c) La intersección de un p-subgrupo de Sylow con un q-subgrupo de Sylow es trivial.

     estos tres hechos se deducen de usar el teorema de Lagrange, ya que el orden de la intersección debería dividir al orden de cada grupo. Ahora, si consideramos la unión de todos los 11 y 3-subgrupos de Sylow, esta contiene al menos $12(11-1) + 4(3-1) + 1 = 129$ elementos. Así, los elementos restantes son al menos 3. En cualquier caso, necesitamos al menos 3 elementos más para formar un 2-subgrupo de Sylow. Estos 3 elementos, junto con la identidad deben formar el único 2-subgrupo de Sylow de orden 4. Sin embargo, hemos llegado a una contradicción ya que $n_2 = 1$. Concluimos.
   - $|G| = 6545$. Notar que $6545 = 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17$. Por contradicción, asumamos que G es simple. Entonces los subgrupos de Sylow no son normales así que, n_5, n_7, n_{11}, y n_{17} son mayores estrictos a 1 . Ahora, como $n_p \mid |G|/p$.

     $$n_5 = 11, n_7 = 85, n_{11} = 594, n_{17} = 35.$$

     (por ejemplo, no podemos tener $n_5 = 7$ porque $n_p \equiv 1 \bmod p$) Como la intersección de estos grupos de Sylow debe ser trivial, su unión contiene

     $$11(5-1) + 85(7-1) + 594(11-1) + 35(17-1) + 1 = 7055 \text{ elementos}$$

     esto es claramente una contradicción (Ya que $7055 > 6545$.)

- $|G| = 1365$. Notemos que $1365 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$. Por contradicción, asumamos que G no es simple. Entonces, n_3, n_7, y n_{13} son todos mayores estrictos a 1 (pues ninguno de los p-subgrupos de Sylow asociados puede ser normal). Tenemos, usando que $n_p \mid |G|/p$

$$n_3 \geqslant 7, n_7 \geqslant 15, n_{13} = 105.$$

Como la intersección entre cualquier par de subgrupos de Sylow es trivial (Lagrange) tenemos que la unión tiene al menos

$$7(3-1) + 15(7-1) + 105(13-1) > 1365 \text{ elementos.}$$

Esto es claramente una contradicción.

6. Propuestos

1. ¿Cuántos elementos de orden 7 deben haber en un grupo simple de orden 168?