Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de matemáticas

Ayudantía 3 MAT214

09 de abril 2024

Mateo Hidalgo

1. Repaso

1. Clasificar los grupos abelianos finito de orden 18.

   Solución: Si G es abeliano de orden 18, tenemos

   $$|G| = 18 = d_1 \dots d_s = 2 \cdot 3^2$$

   con $1 < d_1 \mid \cdots \mid d_s$, es claro que $s \leqslant 2$ (más generalmente, es un ejercicio probar que $s(s+1)/2$ es menor o igual a el número de factores primos en $|G|$).
   Si $s = 1$ entonces $d_s = d_1 = 18$ y $G \simeq \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.
   Si $s = 2$ entonces como $d_1 \mid d_2$ podemos escribir $d_2 = md_1$ y así $18 = d_1^2 m$ por lo que $d_1 = 3$ y $d_2 = 2d_1 = 6$. Así, $G \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

2. Sea G un grupo finito, sea $H \leqslant G$ y $N \trianglelefteq G$ pruebe lo siguiente:

   a) Pruebe que $H \cap N \trianglelefteq H$ y que $N_G(N)$ es el subgrupo más grande G con $N \trianglelefteq N_G(N)$

   Solución: Sea $x \in H \cap N$ y sea $h \in H$, claramente $h^{-1}xh \in H$ y por normalidad (y como $H \subset G$) tenemos $h^{-1}xh \in N$ así que $h^{-1}xh \in H \cap N$, probando su normalidad.
   Recordar que $N_G(A) = \{g \in G \mid \ g^{-1}Ag = A\}$. Probemos que $N \trianglelefteq N_G(N)$. Si $n \in N$ entonces $n^{-1}Nn = N$ (por clausura de $\cdot$ y pues podemos siempre escribir $n' = n^{-1}(nn'n^{-1})n$), así que $N \subset N_G(N)$. Si nos damos $g \in N_G(N)$ arbitrario, entonces $g^{-1}Ng = N$ y en particular $g^{-1}ng \in N$, así que $N \trianglelefteq N_G(N)$.
   Si H es otro subgrupo con $N \trianglelefteq H$ entonces queremos probar $H \subset N_G(N)$, es decir, que dado $h \in H$ tenemos $h^{-1}Nh = N$. Esto se tiene pues si $n \in N \leqslant H$ entonces $h^{-1}nh \in N$ por normalidad $N \trianglelefteq H$ y por otro lado si $n \in N$ entonces $n = h^{-1}(hnh^{-1})h$ con $hnh^{-1} \in N$ por normalidad.

   b) Si $|H|$ y $[G : N]$ son relativamente primos entonces $H \subset N$.

   Solución: Probemos el contrarrecíproco. Si no tuviesemos la inclusión entonces existe $x \in N \backslash H$ así que $0 \neq x \in G/H$ y como $\mathrm{ord}(x) \mid [G : N]$ y $\mathrm{ord}(x) \mid |H|$ así que $|H|$ y $[G : N]$ no serían relativamente primos

   c) Usando lo anterior, pruebe que si $(|N|, [G : N]) = 1$ entonces N es el único subgrupo de G de orden $|N|$.

   Solución: Si tenemos otro grupo H de orden $|N|$ entonces $|H| = |N|$ así que $(|H|, [G : N]) = 1$ y por el ítem anterior tenemos $H \subset N$, por cardinalidad (finita) tenemos $H = N$ como queríamos.

2. Acciones de Grupos

1. Sea $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ y sea $H := \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C}, ac \neq 0\}$. Pruebe que todo elemento de G es conjugado a un elemento del subgrupo H y deduzca que G es la unión de conjugados de H.

Solución: Supongamos $A \in GL_2(\mathbb{C})$. Sea v_1 un vector propio de A con valor propio λ, el cual es no-nulo pues A es invertible. Sea v_2 cualquier vector que no es múltiplo de v_1. Sea V la matriz 2×2 de columnas v_1, v_2, y escribamos $Av_2 = c_1 v_1 + c_2 v_2$. Siendo explícitos,

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}.$$

Nuestra elección de v_2 asegura que V es invertible. Tenemos

$$AV = A \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 & c_1 v_1 + c_2 v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & c_1 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$A = V \begin{pmatrix} \lambda & c_1 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} V^{-1}.$$

Ahora, c_2 no puede ser 0 porque eso implicaría que A no es invertible. Por tanto mostramos que A es conjugada a un elemento de H.

2. **Lema de Cauchy.** Sea G un grupo finito y sea p un número primo dividiendo el cardinal de G. Utilizando una acción conveniente de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sobre el conjunto

$$X = \{(g_1, \ldots, g_p) \in G^p \mid g_1 \cdots g_p = 1\}$$

probar que G admite un elemento de orden p (sin utilizar el Teorema de Sylow!).
Solución: Podemos indexar los elementos de X con los elementos de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
Consideremos la acción de $H = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sobre X, dada por la asignación de $k \in H$ y $x = (g_1, \ldots, g_p) \in X$, a

$$h \cdot x := (g_{1+k}, \ldots, g_{p+k}),$$

donde los índices de g_i son tomados en el grupo $H = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Verifiquemos que para todo $k \in H$ y $x \in X, h \cdot x \in X$. Para esto, debemos verificar que si $g_1 \ldots g_p = 1$ entonces $g_{1+k} \ldots g_{p+k} = 1$. Esto es claro por el siguiente cálculo: si $g_1 \ldots g_p = 1$, donde $g_2 \ldots g_p = g_1^{-1}$, entonces $g_2 \ldots g_p g_1 = 1$, y entonces por recurrencia, se tiene $g_{k+1} \ldots g_p g_1 \ldots g_k = 1$. Entonces la fórmula anterior define una acción de H sobre X. La fórmula de clases se escribe entonces:

$$|X| = \left|X^H\right| + \sum_{\bar{x} \in H \backslash X,\, x \notin X^H} [H : H_x].$$

H es de cardinal p, entonces H_x es necesariamente el grupo trivial si $x \notin X^H$. Donde

$$|X| = \left|X^H\right| + p \left|(H \backslash X) \backslash \overline{X^H}\right|.$$

donde $(X/H) \backslash \overline{X^H}$ es el espacio cociente de X por la acción de H excepto por las órbitas de puntos fijos. Es claro que $|X| = |G|^{p-1}$, entonces $|X|$ es divisible por p. La fórmula de clases asegura entonces que p divide $\left|X^H\right|$. Como $X^H \neq \varnothing$ porque $(1, \ldots, 1) \in X^H$, entonces existe un elemento de X^H distinto de $(1, \ldots, 1)$. Este elemento es de la forma $(g, \ldots, g) \in G^p$ para un cierto $g \in G \backslash \{1\}$. Por definición de X, donde tenemos $g^p = 1$ y $g \neq 1$, esto asegura que g es de orden p en G.

3. Sea G un grupo finito actuando sobre el conjunto finito X. Consideremos el conjunto

$$E := \{(g, x) \in G \times X : g \cdot x = x\},$$

calcular el número máximo de puntos fijos de un elemento de G ¿Qué podemos decir en particular si la acción es transitiva? ¿Qué podemos decir del máximo número de punto fijos en una permutación arbitraria?

Solución: Calculemos el cardinal de E en dos maneras distintas:

$$|E| = \sum_{g\in G} |\operatorname{Fix}(g)|$$

y

$$\begin{aligned} |E| &= \sum_{x\in X} |\mathrm{Stab}_G(x)| \\ &= \sum_{\bar{x}\in X/G} \sum_{y\in\bar{x}} |\mathrm{Stab}_G(y)| \\ &= \sum_{\bar{x}\in X/G} |\bar{x}|\cdot|\mathrm{Stab}_G(\bar{x})| = |G|\cdot|X/G|, \end{aligned}$$

denotemos por $\operatorname{Fix}(g) := \{x \in X : g\cdot x = x\}$ al conjunto de puntos fijos para g en X. Deducimos entonces la igualdad

$$\sum_{g\in G} |\operatorname{Fix}(g) = |G|\cdot|X/G\,|$$

es decir

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |\operatorname{Fix}(g)| = |X/G|.$$

Esto significa que el máximo número de puntos fijos de G es exactamente $|X/G|$, es decir, el número de órbitas de la acción. En particular, si la acción es transitiva, este nuúmero es 1. Por ejemplo, si $G = \mathfrak{S}_n$ actúa (con la acción obvia) sobre $X = \{1,\ldots,n\}$, entonces se tiene que el máximo número de puntos fijos de una permutación es exactamente uno.

4. Sea G un grupo

   a) Supongamos que G es finito y si p es el número primo más pequeño dividiendo $|G|$. Mostrar que todo subgrupo de G de índice p es normal.

   b) Supongamos que G es finito y que admite un subgrupo estricto de índice finito. Mostrar que G no es un grupo simple.

   Solución:

   a) Sea H un subgrupo de G de índice p. Definamos $X := G/H$, este es un conjunto de cardinal p, dotado de la acción natural transitiva de G. Esta acción induce un morfismo de grupos finitos $\varphi : G \to \mathfrak{S}(X)$. Nos interesa tener la restricción de esta acción a un subgrupo H, es decir, a un morfismo

   $$\varphi : H \to \mathfrak{S}(X).$$

   Como H actúa trivialmente por la clase de x_0 de H sobre G/H, la acción de H en H induce una acción de H por $X' := X\backslash\{x_0\}$ que podemos escribir como morfismo de grupos como

   $$\psi : H \to \mathfrak{S}\left(X'\right).$$

   Como X' es de cardinal $p-1$, entonces todos los factores primos del cardinal de $\mathfrak{S}(X')$ son estrictamente inferiores a p. Como los factores primos del cardinal de H son por hipótesis todos igualres o mayores a p. Por tanto, el cardinal de H y $\mathfrak{S}(X')$ son coprimos, lo que implica que el morfismo ψ es el morfismo trivial. Entonces H actúa trivialmente sobre X', entonces también sobre X. Mostremos que esto implica que H es normal sobre G. Sea $h \in H$ y $g \in G$. Como H actúa trivialmente sobre X, tenemos que $h\cdot(gH) = gH$, entonces $\left(g^{-1}hg\right)H = H$, por tanto $g^{-1}hg \in H$ y así H es normal en G.

b) Como en el ítem anterior, consideremos la acción de G sobre el conjunto finito $X := G/H$, es decir el morfismo de grupos inducido:

$$\varphi : G \to \mathfrak{S}(X).$$

Como la acción de X es transitiva y como $H \neq G$, el morfismo φ es no trivial. Su kernel $\text{Ker}(\varphi)$ un subgrupo normal de G distinto de G. Por otro lado, G es finito y $\mathfrak{S}(X)$ es finito, entonces el morfismo φ no es inyectivo, por tanto $\text{Ker}(\varphi)$ no es el grupo trivial. Finalmente $\text{Ker}(\varphi)$ es un subgrupo normal no trivial de G, es decir G no es simple.

5. Sea G un grupo finito no trivial actuando sobre un conjunto finito X. Supongamos que para todo $g \neq e \in G$, existe un único $x \in X$ tal que $g{\cdot}x = x$. Queremos mostrar que X admite un punto fijo sobre G (necesariamente único).

a) $Y := \{x \in X : \text{Stab}_G(x) \neq \{e\}\}$. Mostrar que Y es estable por G.

b) Denotemos $n = |G\backslash Y|$ y $y_1, \ldots, y_n$ un sistema de representantes de $G\backslash Y$. Para todo i, notemos m_i el cardinal de $\text{Stab}_G(y_i)$. Consideremos el conjunto $Z := \{(g, x) \in (G\backslash\{e\}) \times X : g \cdot x = x\}$, mostrar que

$$1 - \frac{1}{|G|} = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right).$$

c) Deducir que $n = 1$.

d) Concluir.

. **Solución:**

a) Sea $x \in Y$ y $g \in G$. Sabemos que $\text{Stab}_G(g \cdot x) = g\,\text{Stab}_G(x)g^{-1}$, entonces como $\text{Stab}_G(x) \neq \{e\}$, donde $\text{Stab}_G(g \cdot x) \neq \{e\}$, así que $g \cdot x \in Y$. Por tanto Y es estable para G.

b) Calculando el cardinal de Z de dos formas distintas, puesto que par todo $x \in X\backslash Y, \text{Stab}_G(x)\backslash\{e\} = \varnothing$:

$$|G| - 1 = \sum_{y \in Y} (|\text{Stab}_G(y)| - 1).$$

Podemos reagrupar los elementos de Y en órbitas y obtener

$$|G| - 1 = \sum_{i=1}^{n} |O_{y_i}| (|\text{Stab}_G(y_i)| - 1) = \sum_{i=1}^{n} |G| \left(1 - \frac{1}{m_i}\right).$$

Dividiendo a $|G|$ y obteniendo el resultado

c) Por definición, para todo i tenemos $m_i \geqslant 2$. Por tanto deducimos que

$$1 > 1 - \frac{1}{|G|} = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \geqslant \frac{n}{2},$$

así $n < 2$, y $n = 1$ (el caso $n = 0$ es imposible porque G es no-trivial).

d) Escojamos $y_1 \in Y$. Entonces por los ítems anteriores, tenemos un $|\text{Stab}_G(y_1)| = |G|$, sobre $\text{Stab}_G(y_1) = G$, entonces y_1 está fijo por G.

3. Propuestos

1. Considere el cuerpo finito $G = \mathbb{F}_P$ con p primo y su espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_p)$. Demuestre que

$$|\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_p)| = 1 + p + p^2 + \ldots + p^n$$

2. Teorema. Sea $(P, \leqslant)$ un conjunto no vacío parcialmente ordenado, supongamos que toda cadena (es decir, todo subconjunto totalmente ordenado) de P tiene una cota superior en P. Entonces P tiene un elemento maximal

   Para probar el teorema siga las siguientes indicaciones

   a) Asuma por contradicción que P no tiene elementos maximales. Defina para todo cadena C, $U_C := \{x \in P \mid y < x \text{ para todo } y \in C\} \subseteq P \backslash C$. Comprobando adecuadamente las hipótesis del axioma de elección, concluya que existe una función de elección f tal que $f(U_C) \in U_C$ para cada cadena C de P.

   b) Diremos que una cadena $C \subset P$ tiene la propiedad $(i - C)$ si todo subconjunto $S \subset C$ con $U_S \not\subset U_C$ cumple $f(U_S) \in C$. Denotamos por $\mathscr{C}_0$ al conjunto de cadenas que cumplen esta propiedad. Diremos que una cadena $C \subset P$ tiene la propiedad $(ii - C)$ si $C' \in \mathscr{C}_0$ implica que $C \backslash C' \subset U_{C'}$. Denotamos por $\mathscr{C}$ al conjunto de todas las cadenas que satisfacen esta propiedad. Sea C^* la unión de todas las cadenas en $\mathscr{C}$. Muestre que C^* es una cadena de $\mathscr{C}$.

   c) Sea $u := f(U_{C*})$ y sea $C^{**} := C^* \cup \{u\}$. Muestre que $C^{**} \in \mathscr{C}$. Concluya que $C^{**} \subset C^*$ obteniendo así una contradicción.

3. Un subgrupo M de G es llamado un subgrupo maximal si $M \neq G$ y los únicos subgrupos de G que contienen a M son M y G. Pruebe que si $|G|$ es finito y $H \leqslant G$ entonces hay un subgrupo maximal de G conteniendo a H. (Hint: Usar que $H_1 \leqslant H_2 \implies |H_1| \leqslant |H_2|$).

4. Use el lema de Zorn para probar que todo grupo finitamente generado no-nulo tiene subgrupos maximales. La manera de usar el lema de Zorn es la siguiente:

   a) Sea $G = \langle g_1 \ldots, g_n \rangle$ y $\mathscr{S}$ el conjunto de todos los subgrupos propios de G. Sea $\mathscr{C}$ una cadena de $\mathscr{S}$. Pruebe que la unión de todos los subgrupos de $\mathscr{C}$ que contienen a H pertenece a $\mathscr{S}$.

   b) Use el lema de Zorn para probar que $\mathscr{S}$ tiene un elemento maximal.