Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de matemáticas

Ayudantía 2 MAT214

02 de abril 2024

Mateo Hidalgo

1. Teoría de Grupos

1. Dados grupos $(G, \cdot_G)$ y $(H, \cdot_H)$ dote a $G \times H$ de la ley de composición interna $\cdot$ dada por $(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 \cdot_G g_2, h_1 \cdot_H h_2)$. Para economizar notación denotaremos a cada ley de composición interna por yuxtaposición.

   a) Muestre que esta ley de composición está bien definida y hace de $G \times H$ un grupo. Muestre que las proyecciones $\pi_G : G \times H \to G$ y $\pi_H : G \times H \to H$ son morfismos de grupos.

   Solución: Como $\cdot_G$ y $\cdot_H$ son leyes de composición interna, el elemento $(g_1 \cdot_G g_2, h_1 \cdot_H h_2)$ está en $G \times H$ así que $\cdot$ es ley de composición interna.
   Notamos que $((g_1, h_2)(g_2, h_2))(g_3, h_3) = (g_1g_2, h_1h_2)(g_3, h_3) = ((g_1g_2)g_3, (h_1h_2)h_3) = (g_1(g_2g_3), h_1(h_2h_3)) = (g_1, h_1)((g_2, h_2)(g_3, h_3))$ así, la asociatividad de $\cdot$ se deduce de la asociatividad de $\cdot_G$ y $\cdot_H$. Análogamente, queda como ejercicio al lector calcular que si G tiene neutro e_G y H tiene neutro e_H entonces el neutro de $G \times H$ es (e_G, e_H) y el inverso de un elemento (g, h) es (g^{-1}, h^{-1}).
   Mostremos que π_G es morfismo de grupos, el argumento para π_H es análogo. En efecto dados $g_1, g_2 \in G$ y $h_1, h_2 \in H$:
   $$\pi_G((g_1, h_1)(g_2, h_2)) = \pi_G(g_1g_2, h_1h_2) = g_1g_2 = \pi_G(g_1, h_2)\pi_G(g_2, h_2)$$

   b) Muestre que $G \times H \simeq H \times G$. Muestre que $G \times H$ es abeliano si y solo si G y H son abelianos.

   Solución: En efecto, la función $\phi : G \times H \to H \times G, (g, h) \mapsto (h, g)$ tiene inversa (por ambos lados) $\psi : H \times G \to G \times, (h, g) \mapsto (g, h)$ así que es biyectiva. Además ϕ es un morfismo pues $\phi((g_1, h_1)(g_2, h_2)) = \phi(g_1g_2, h_1h_2) = (h_1h_2, g_1g_2) = (h_1, g_1)(h_2, g_2) = \phi(g_1, h_1)\phi(g_2, h_2)$.
   Recordemos que si $\phi : G \to H$ es un morfismo de grupos y G es abeliano entonces $\phi(G)$ es abeliano (en efecto, $\phi(x_1)\phi(x_2) = \phi(x_1x_2) = \phi(x_2x_1) = \phi(x_2)\phi(x_1)$). En este caso considerando los morfismos sobreyectivos $\pi_G : G \times H \to G$ y $\pi_H : G \times H \to H$ tenemos que si $G \times H$ es abeliano entonces G y H también. El recíproco es fácil y se deja como ejercicio.

   c) Mostrar que si $C \trianglelefteq A$ y $D \trianglelefteq B$ entonces $(C \times D) \trianglelefteq A \times B$ y $(A \times B)/(C \times D) \simeq (A/C) \times (B/D)$.

   Solución: Probar que $C \times D$ es subgrupo de $A \times B$ queda como ejercicio para el lector. Para probar la normalidad una opción es hacerlo a mano. En efecto, sea $(c, d) \in C \times D$ y sean $(a, b) \in A \times B$ entonces
   $$(a, b)^{-1}(c, d)(a, b) = (a^{-1}ca, b^{-1}db) \in C \times D$$
   donde la última inclusión es pues C y D son normales.
   Por lo anterior, cada cociente está bien definido. Consideremos ahora $\phi : A \times B \to A/C \times B/D$ dado por $(a, b) \mapsto ([a]_C, [b]_D)$. Probemos que ϕ es un morfismo de grupos. En efecto, $\phi((a_1, b_1)(a_2, b_2)) = \phi(a_1a_2, b_1b_2) = ([a_1a_2]_C, [b_1b_2]_D) = ([a_1]_C, [b_1]_D)([a_2]_C, [b_2]_D) = \phi(a_1, b_1)\phi(a_2, b_2)$. Probemos que ϕ es sobreyectivo. En efecto, si $[a]_C, [b]_D \in (A/C) \times (B/D)$ entonces $\phi(a, b) = ([a]_C, [b]_D)$. Finalmente,

notemos que $\ker(\phi) = C \times D$, esto prueba "en abstracto" que $C \times D \trianglelefteq A \times B$. En efecto,

$$\phi(a,b) = ([a]_C, [b]_D) = (0,0) \iff a \in C, B \in D \iff (a,b) \in C \times D$$

concluimos por el primer teorema del isomorfismo que $(A \times B)/(C \times D) \simeq (A/C) \times (B/D)$.

2. Sea G un grupo finitamente generado y sea $H \leqslant G$ un subgrupo de índice finito. Probar que H es finitamente generado. Indicación: Si $a_1, \ldots, a_m \in G$ son generadores, y si $g_1H, \ldots, g_nH$ son todas las clases laterales izquierdas, donde $g_1 = e$, probar que el conjunto finito $H \cap \{g_i^{-1} a_k g_j, 1 \leqslant k \leqslant m, 1 \leqslant i,j \leqslant m\}$ genera H.

   Solución: Suponga que G/H es finito. Entonces podemos encontrar un número finito de elementos $g_1 = e, \ldots, g_n$ de G tales que $G/H = \{g_1H, \ldots, g_nH\}$. Puesto que G es de tipo finito, tenemos elementos $h_1, \ldots, h_m \in G$ tales que todo elemento de G es producto de h_i. Entonces para todo i,j, existe $1 \leqslant k \leqslant n$ y $h_{i,j} \in H$ tales que $h_i \cdot g_j = g_k \cdot h_{i,j}$. Mostremos entonces que los $h_{i,j}$ generan H. Sea $h \in H$. Sabemos que existen enteros $i_1, \ldots, i_r$ tales que $h = h_{i_1} \ldots h_{i_r}$ (Queda como ejercicio probar que no es necesario permitir exponentes en este producto). Entonces $h_{i_r} = h_{i_r} \cdot e = h_{i_r} \cdot g_1 = g_{k_r} \cdot h_{i_r,1}$, y finalmente

$$h = h_{i_1} \cdot \cdots \cdot h_{i_{r-1}} \cdot g_{k_r} \cdot h_{i_r,1}.$$

   Análogamente, $h_{i_{r-1}} \cdot g_{k_r} = g_{k_{r-1}} \cdot h_{i_{r-1},k_r}$, así que

$$h = h_{i_1} \cdot \cdots \cdot h_{i_{r-2}} \cdot g_{k_{r-1}} \cdot h_{i_{r-1},k_r} \cdot h_{i_r,1}.$$

   Entonces, por inducción, encontramos

$$h = g_{k_1} \cdot h_{i_1,k_2} \cdots h_{i_{r-1},k_r} \cdot h_{i_r,1}.$$

   Finalmente, h y los $h_{i,j}$ están en H, por lo que $g_{k_1} \in H$, así $k_1 = 1$ y entonces

$$h = h_{i_1,k_2} \cdots h_{i_{r-1},k_r} \cdot h_{i_r,1},$$

   concluimos

3. Sea G un grupo y sea N un subgrupo normal de íncide n. Muestre que $g^n \in N$ para todo $g \in G$.

   Solución: Tenemos por hipótesis que $G/N = \{g_1N, \ldots, g_nN\}$ es un grupo. Si $g \in G$ entonces su imagen en el cociente $gN = g_iN$ para algún i. Como $(g_iN)^n = g_i^nN$ y el teorema de Lagrange nos da que $x^{|G|} = e_G$ para todo grupo G de neutro e_G, tenemos que $(g^nN) = (gN)^n = (g_iN)^n = 0$, es decir $g^n \in N$.

4. Muestre que si $\{H_i\}_{i\in I}$ (para $I \neq \varnothing$) es una familia de subgrupos del grupo G entonces

   a) $\bigcap H_i$ es subgrupo de G.

   Solución: Como la identidad pertenece a cada subgrupo H_i entonces pertenece a la intersección $\bigcap H_i$, que será entonces no vacía. Para concluir que es subgrupo, basta mostrar que para $g,h \in \bigcap H_i$ arbitrarios, tenemos $gh^{-1} \in \bigcap H_i$. En efecto, $g,h \in \bigcap H_i$ implica que para todo $i \in I$ tenemos $g,h \in H_i$, por tanto $gh^{-1} \in H_i$ y por tanto $gh^{-1} \in \bigcap H_i$. Concluimos

   b) Si $H_1 \cup H_2$ es subgrupo de G entonces $H_1 \subset H_2$ o $H_2 \subset H_1$.

   Solución: Supongamos que $H_2 \not\subset H_1$ y $H_1 \subset H_2$. Tenemos entonces $x \in H_2 \backslash H_1 \subset H_1 \cup H_2$ y $y \in H_1 \backslash H_2 \subset H_1 \cup H_2$ con $xy \in H_1 \cup H_2$, así que $xy \in H_1$ o $xy \in H_2$ (sin pérdida de generalidad, asumamos $xy \in H_1$). Entonces $x = (xy)y^{-1} \in H_1$ contradicción.

   c) Si $I = \mathbb{N}$ y $H_1 \subset H_2 \subset H_3 \subset \ldots$ entonces $\bigcup H_i$ es subgrupo de G. (el argumento se generaliza al caso en I es un *conjunto dirigido*)

Solución: En efecto, claramente $\bigcup H_i$ es no vacío. Sean $g, h \in \bigcup H_i$, entonces existe $i_0 \in I$ tal que $g \in H_{i_0}$ y j_0 tal que $h \in H_{j_0}$ pero entonces existe $k_0 \geqslant i_0, j_0$ así que $g, h \in H_{k_0}$ y $gh^{-1} \in H_{k_0} \subset \bigcup H_i$. Concluimos.

2. Propuestos

1. Dados $H, K \leqslant G$ definamos $HK := \{hk \mid \ h \in H, k \in K\} \subset G$ notar que HK en general **no** es un subgrupo de G.
   Sea G un grupo y sean $H \trianglelefteq G, K \trianglelefteq G$ subgrupos normales. Probar que si $HK = G$ y $H \cap K = \{e\}$, entonces G es isomorfo a $H \times K$.

2. Sea $n \in \mathbb{N} \geqslant 1$ fijo. Considere G un grupo con la propiedad que para todos $x, y \in G$ se cumple que $(xy)^n = x^n y^n$, y defina
$$H := \{x \in G \text{ tal que } x^n = e\}, \quad K := \{x^n, x \in G\}.$$
   Probar que H y K son subgrupos normales de G, y probar que $|K| = [G : H]$.

3. El objetivo de este ejercicio es estudiar la acción de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ en el hiperplano de Poincaré
$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \operatorname{Im}(z) > 0\}$$
   y, como aplicación, describir generadores de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

   a) Probar que la acción de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ en $\mathbb{H}$ dada por
$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z\right) \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$
   está bien definida (i.e., $A \cdot z \in \mathbb{H}$ para todo $z \in \mathbb{H}$ y toda $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$), es transitiva y su kernel está dado por $\{\pm \mathrm{I}_2\}$. En particular, la acción de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) := \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm \mathrm{I}_2\}$ en $\mathbb{H}$ es **fiel**.

   b) Sea $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm \mathrm{I}_2\}$. Probar que el estabilizador de $i \in \mathbb{H}$ está generado por la matriz
$$S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Sea G un grupo actuando sobre un abierto X de $\mathbb{R}^n$ (e.g. $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ actuando sobre el abierto $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$). Un subconjunto $\mathscr{F} \subseteq X$ es un **dominio fundamental** para la acción de G en X si se cumplen las siguientes condiciones:
$$\text{(i) } \overline{\operatorname{int}(\mathscr{F})} = \mathscr{F}, \quad \text{(ii) } X = \bigcup_{g \in G} g \cdot \mathscr{F}, \quad \text{(iii) Para todo } g \in G \backslash \{e\},\ \operatorname{int}(\mathscr{F}) \cap \operatorname{int}(g \cdot \mathscr{F}) = \varnothing.$$
   En todo lo que sigue, considere
$$\mathscr{D} := \left\{z \in \mathbb{H} \text{ tal que } |\operatorname{Re}(z)| \leqslant \frac{1}{2} \text{ y } |z| \geqslant 1\right\}.$$

   a) Sea $z \in \mathbb{H}$ fijo y considere el conjunto $Y := \{w \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z} \cdot z \text{ tal que } \operatorname{Im}(w) \geqslant \operatorname{Im}(z)\}$. Pruebe que existe $w \in Y$ tal que $\operatorname{Im}(w)$ es maximal. Utilizar lo anterior para deducir que $\mathscr{D}$ verifica la propiedad (ii).

   Indicación: Considere la matriz $T := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. *Analizar* $T^n \cdot w$ *y* $S \cdot w$.

   b) Probar que $\mathscr{D}$ es un dominio fundamental para la acción de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ en $\mathbb{H}$.

c) Deducir que las matrices S y T generan $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Indicación: Sea $A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. *Deducir, modificando el argumento del ítem (3) y (4), que existe una matriz* $B \in \langle S, T \rangle \leqslant \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ *tal que* $BA = \pm \mathrm{I}_2$ *(i.e.,* $A = B^{-1}$ *en* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$*). Finalmente, usar que* $S^2 = -\mathrm{I}_2$ *para deducir que* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \langle S, T \rangle$.