Ayudantía 12 Estructuras Algebraicas

13 de junio de 2023

Problema 1. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y V, W $\mathbb{K}-$espacios vectoriales. Construya una aplicación lineal inyectiva

$$\Phi : V^* \otimes_{\mathbb{K}} W \longrightarrow \mathrm{Hom}(V, W)$$

Determine cuándo esta aplicación es un isomorfismo.

Demostración. Podemos definir la siguiente aplicación bilineal:

$$V^* \times W \longrightarrow \mathrm{Hom}(V, W), \qquad (f, w) \mapsto (v \mapsto f(v)w)$$

que claramente está bien definida y es $\mathbb{K}-$bilineal. Por la propiedad universal del cociente esta aplicación induce entonces la aplicación lineal:

$$\Phi : V^* \otimes_{\mathbb{K}} W \longrightarrow \mathrm{Hom}(V, W), \qquad f \otimes w \mapsto (v \mapsto f(v)w)$$

Probemos ahora que esta aplicación es inyectiva. Sea $\{w_j\}_{j \in J}$ base de W. Entonces todo elemento de $V^* \otimes_{\mathbb{K}} W$ es de la forma $x = \sum_{\text{finita}} f_j \otimes w_j$ para ciertas $f_j \in V^*$. Suponer que:

$$\Phi(x)(v) = \sum_{\text{finita}} f_j(v) w_j = 0 \qquad ?? \in V$$

Como w_j es base tenemos entonces que $f_j(v) = 0$ para todo j y para todo $v \in V$, ie, $f_j = 0$ en V^*, lo que prueba la inyectividad.
Analicemos ahora la sobreyectividad de Φ. Notar que esta aplicación no siempre será sobreyectiva pues note que la imagen de un tensor simple $\Phi(f \otimes w)$ siempre es una aplicación lineal de rango 1, y dado que un elemento del tensor es combinación lineal finita de tensores simples la imagen de Φ corresponde a aplicaciones lineales de rango finito. De hecho, la imagen de Φ consta de todas las aplicaciones lineales de rango finito. En efecto, sea $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ tal que $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) < +\infty$ y sea $v_1, \ldots, v_m \in V$ tal que $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_m)$ es base de $\mathrm{Im}(\varphi)$. Podemos considerar la base dual $v_i^* \in V^*$, ie, $v_i^*(v_j) = \delta_{i,j}$ y luego

$$\Phi\left(\sum v_i^* \otimes w_i\right)(v_i) = \sum v_i^*(v_i) w_i = w_i \qquad \forall i = 1, \ldots, m$$

así que $\sum v_i^* \otimes w_i$ es una preimagen de φ. Deducimos entonces que si $\dim(V) < +\infty$ o $\dim(W) < +\infty$ entonces Φ es un isomorfismo pues en este caso toda aplicación lineal en $\mathrm{Hom}(V, W)$ tendrá rango finito. $\square$

Problema 2. El objetivo de este problema es estudiar cómo interactúa el producto tensorial de módulos con el producto y suma directa. Consideremos entonces A un anillo y M un $A-$módulo y $\{N_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una colección arbitraria de $A-$módulos.

1. Demuestre que la suma directa conmuta con el producto tensorial, ie,

$$M \otimes_A \left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda\right) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (M \otimes_A N_i)$$

2. Considere $A = \mathbb{Z}, M = \mathbb{Q}, N_i = \mathbb{Z}/2^i\mathbb{Z}$ con $i \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y muestre que en este caso el producto tensorial y el producto directo no conmutan.

Demostración.

1. Buscamos probar que la suma directa de la derecha en el enunciado verifica la propiedad universal del producto tensorial. El primer paso es entonces definir una aplicación bilineal adecuada. Definimos directamente:

$$\Phi : M \times \left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda \right) \longrightarrow \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (M \otimes_A N_i), \qquad (m, (n_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) \mapsto (m \otimes n_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$$

que claramente es bilineal por la bilinealidad de $\otimes$. Sea P un $A-$módulo y $\Psi : M \times \left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda\right) \to P$ aplicación bilineal. Para cada $\lambda \in \Lambda$ tenemos una aplicación bilineal $M \times N_\lambda, (m, n_\lambda) \mapsto \Psi(m, (\ldots, 0, n_\lambda, 0, \ldots))$ y por tanto una aplicación lineal $\psi_\lambda : M \otimes N_\lambda, m \otimes n_\lambda \mapsto \Psi(m, (\ldots, 0, n_\lambda, 0, \ldots))$. Podemos definir entonces:

$$\Theta := \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \psi_\lambda : \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} (M \otimes_A N_i) \to P, \qquad (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto \sum_{\lambda\in\Lambda} \psi_\lambda(x_\lambda)$$

que está bien definida por definición de la suma directa. Por construcción obtenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
M \times \bigoplus N_\lambda \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[d, "\Phi"'] & & P \\
\bigoplus (M \otimes N_\lambda) \arrow[urr, "\Theta"'] & &
\end{tikzcd}$$

y de esta forma concluimos pues se verifica la propiedad universal.

2. Notar que por ejercicio de clases tenemos que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} N_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, pero $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\prod_{i\in\mathbb{N}^{\geq 1}} N_i\right) \neq 0$, pues $x \otimes (1, 1, \ldots) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{Q}$. De esta manera, $\prod_{i\in\mathbb{N}^{\geq 1}} (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} N_i) \neq \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\prod_{i\in\mathbb{N}^{\geq 1}} N_i\right)$.

$\square$

Problema 3. El objetivo de este problema es comprender un caso en que el producto tensorial es 0, y encontrar condiciones bajo las cuales esto no sucede. El siguiente punto da un ejemplo de esta situación.

1. Sea A un anillo y $\mathbb{K} = \mathrm{Fr}(A)$ su cuerpo de fracciones. Muestre que $(\mathbb{K}/A) \otimes_A (\mathbb{K}/A) = 0$.

La meta a continuación es probar el siguiente criterio: si A es un anillo local y sean M, N $A-$módulos finitamente generados. Demuestre que si $M \otimes_A N = 0$ entonces $M = 0$ o bien $N = 0$. Para ello siga los siguientes pasos.

2. Sea $\mathfrak{m}$ el ideal maximal de A. Utilice la exactitud del producto tensorial para demostrar que existe un morfismo sobreyectivo $M \otimes_A N \twoheadrightarrow (M/\mathfrak{m}M) \otimes_A (N/\mathfrak{m}N)$ y deduzca que $(M/\mathfrak{m}M) \otimes_A (N/\mathfrak{m}N) = 0$.

3. Denote por $\mathbb{K} = A/\mathfrak{m}$ el cuerpo residual de A. Use la propiedad universal del producto tensorial para concluir que $(M/\mathfrak{m}M) \otimes_{\mathbb{K}} (N/\mathfrak{m}N) = 0$.

4. Concluya empleando el Lema de Nakayama.

Demostración.

1. Considerar $x \otimes y \in \mathbb{K}/A \otimes_A \mathbb{K}/A$. Por definición $y = [p/q]$ para ciertos $p, q \in A$ y es claro que $qy = q[p/q] = [p] = 0$ en $\mathbb{K}/A$. Así, vemos que:

$$x \otimes y = \left(\frac{q}{q} x\right) \otimes y = \left(\frac{x}{q}\right) \otimes (qy) = 0$$

de donde se tiene el resultado pues todo tensor simple es 0.

2. Consideremos la proyección canónica $M \twoheadrightarrow M/\mathfrak{m}M$ la cual es sobreyectiva. Dado que el producto tensorial es exacto por la derecha obtenemos un morfismo $M \otimes_A N \twoheadrightarrow (M/\mathfrak{m}M) \otimes_A N$. De manera similar tenemos un morfismo sobreyectivo $(M/\mathfrak{m}M) \otimes_A N \twoheadrightarrow (M/\mathfrak{m}M) \otimes_A (N/\mathfrak{m}N)$. Componiendo estos dos morfismos obtenemos un morfismo sobreyectivo $M \otimes_A N \twoheadrightarrow (M/\mathfrak{m}M) \otimes_A (N/\mathfrak{m}N)$, y dado que estamos suponiendo $M \otimes_A N = 0$ entonces $(M/\mathfrak{m}M) \otimes_A (N/\mathfrak{m}N) = 0$.

3. Podemos definir la aplicación:

$$(M/\mathfrak{m}M) \times (N/\mathfrak{m}N) \longrightarrow (M/\mathfrak{m}M) \otimes_{\mathbb{K}} (N/\mathfrak{m}N), \qquad ([m],[n]) \mapsto [m] \otimes [n]$$

la cual es claramente $k-$bilineal por propiedades de $\otimes$. En particular, esta aplicación es $A-$bilineal (simplemente olvidar tomar clase en los escalares), así que la propiedad universal del cociente nos da una factorización a través de $(M/\mathfrak{m}M) \otimes_A (N/\mathfrak{m}N)$, resultando el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(M/\mathfrak{m}M) \times (N/\mathfrak{m}N) \arrow[r] \arrow[d] & (M/\mathfrak{m}M) \otimes_{\mathbb{K}} (N/\mathfrak{m}N) \\
(M/\mathfrak{m}M) \otimes_A (N/\mathfrak{m}N) \arrow[ur, "\exists!"'] &
\end{tikzcd}$$

Ahora, como $(M/\mathfrak{m}M) \otimes_A (N/\mathfrak{m}N) = 0$, entonces la aplicación bilineal original es 0, es decir, todo tensor simple de $(M/\mathfrak{m}M) \otimes_{\mathbb{K}} (N/\mathfrak{m}N)$ es nulo así que $(M/\mathfrak{m}M) \otimes_{\mathbb{K}} (N/\mathfrak{m}N) = 0$.

4. Tenemos que $(M/\mathfrak{m}M) \otimes_A (N/\mathfrak{m}N)$ es de hecho un $\mathbb{K}-$espacio vectorial, así que el hecho que sea nulo implica que $(M/\mathfrak{m}M) = 0$ o bien $N/\mathfrak{m}N = 0$, pues en el caso de espacios vectoriales tenemos la fórmula de dimensión $\dim(V \otimes W) = \dim(V)\dim(W)$. Sin pérdida de generalidad, si $M/\mathfrak{m}M = 0$, entonces $M = \mathfrak{m}M$ y el Lema de Nakayama nos permite concluir directamente que $M = 0$.

$\square$

Problema 4. El objetivo de este problame es introducir el álgebra tensorial de un $A-$módulo y probar propiedades básicas. Sea $A-$anillo y M un $A-$módulo. Para cada $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ definimos la $k-$ésima potencia tensorial de M como $\mathcal{T}^k(M) := M \otimes M \otimes \cdots \otimes M$ donde hay k factores. Definimos el *álgebra tensorial* de M como:

$$\mathcal{T}(M) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{T}^k(M)$$

donde por convención definimos $\mathcal{T}^0(M) := A$.

1. Muestre que $\mathcal{T}(M)$ es una $A-$álgebra tal que $\mathcal{T}^i(M)\mathcal{T}^j(M) \subseteq \mathcal{T}^{i+j}(M)$.

2. (Propiedad Universal) Demuestre que para toda $A-$álgebra B y todo morfismo de $A-$módulos $\varphi : M \to B$, existe un único morfismo de $A-$álgebras $\Phi : \mathcal{T}(M) \to B$ tal que $\Phi|_M = \varphi$.

3. (Functorialidad) Sea $\varphi : M \to N$ morfismo de $A-$módulos. Pruebe que existe un único morfismo de $A-$álgebras $\mathcal{T}(\varphi)$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook, "i_M"] & N \arrow[d, hook, "i_N"] \\
\mathcal{T}(M) \arrow[r, "\mathcal{T}(\varphi)"'] & \mathcal{T}(N)
\end{tikzcd}$$

y más aún, si $\psi : N \to P$ es otro morfismo de $A-$módulos entonces $\mathcal{T}(\psi \circ \varphi) = \mathcal{T}(\psi) \circ \mathcal{T}(\varphi)$.

Demostración.

1. Dado que los $k-$tensores simples son generadores de $\mathcal{T}^k(M)$ basta definir el producto para tensores simples y extender a combinaciones lineales exigiendo la distributividad. Definimos entonces para i, j la aplicación multilineal:

$$M^{i+j} \to \mathcal{T}^{i+j}(M), \qquad (m_1, \dots, m_i, m'_1, \dots, m'_j) \mapsto m_1 \otimes \dots m_i \otimes m'_1 \otimes \dots \otimes m'_j$$

la cual por propiedad universal induce una aplicación bilineal

$$\mathcal{T}^i(M) \times \mathcal{T}^j(M) \to \mathcal{T}^{i+j}, \qquad m_1 \otimes \dots \otimes m_i, m'_1 \otimes \dots \otimes m'_j) \mapsto (m_1 \otimes \dots m_i \otimes m'_1 \otimes \dots \otimes m'_j$$

Esta es la multiplicación en $\mathcal{T}(M)$.

2. Sea $\varphi : M \to B$ un morfismo de $A-$módulos con B una $A-$álgebra. La aplicación $A-$multilineal:

$$M^k \to B, \qquad (m_1, \dots, m_k) \mapsto \varphi(m_1)\varphi(m_2) \cdots \varphi(m_k)$$

define por propiedad universal de $\mathcal{T}^k(M)$ un morfismo de $A-$módulos $\varphi_k : \mathcal{T}^k(M) \to B, m_1 \otimes \cdots \otimes m_k \mapsto \varphi(m_1)\varphi(m_2) \cdots \varphi(m_k)$. Definimos entonces:

$$\Phi := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \varphi_k : \mathcal{T}(M) \to B, \qquad (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x_k)$$

que es un morfismo de $A-$álgebras pues:

$$\begin{aligned}\Phi((m_1 \otimes \cdots \otimes m_i) \otimes (m'_1 \otimes \cdots \otimes m'_j)) &= \varphi(m_1) \cdots \varphi(m_i)\varphi(m'_1) \cdots \varphi(m'_j) \\ &= \Phi(m_1 \otimes \cdots \otimes m_i)\Phi(m'_1 \otimes \cdots \otimes m'_j)\end{aligned}$$

3. La functorialidad de $\mathcal{T}^k(M)$ nos permite obtener un morfismo $\mathcal{T}^k(\varphi) := \varphi \otimes \cdots \otimes \varphi$ $k-$veces, y luego podemos definir $\mathcal{T}(\varphi) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{T}^k(\varphi) : \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(N)$ que por construcción verifica que el diagrama conmuta. Esta aplicación actúa mediante:

$$\mathcal{T}(\varphi)(m_1 \otimes \cdots \otimes m_k) = \varphi(m_1) \otimes \cdots \otimes \varphi(m_k)$$

así que fácilmente se observa que es un morfismo de $A-$álgebras. La regla de composición se sigue directamente notando que si $\psi : N \to P$ es un morfismo de $A-$módulos entonces:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(\psi \circ \varphi)(m_1 \otimes \cdots \otimes m_k) &= (\psi \circ \varphi)(m_1) \otimes \cdots \otimes (\psi \circ \varphi)(m_k) \\ &= \mathcal{T}(\psi)(\varphi(m_1) \otimes \cdots \otimes \varphi(m_k)) \\ &= (\mathcal{T}(\psi) \circ \mathcal{T}(\varphi))(m_1 \otimes \cdots \otimes m_k)\end{aligned}$$

concluyendo que $\mathcal{T}(\psi \circ \varphi) = \mathcal{T}(\psi) \circ \mathcal{T}(\varphi)$.

$\square$