UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Profesor: Pedro Montero
Ayudante: Sebastián Fuentes

Pauta Ayudantía 10 Estructuras Algebraicas

30 de mayo de 2023

Problema 1. Sea A anillo y M un $A-$módulo finitamente generado. El objetivo de este problema es mostrar que todo endomorfismo $u : M \twoheadrightarrow M$ sobreyectivo es un isomorfismo. Para ello proceda como sigue:

1. Utilice u para definir una estructura de $A[X]$-módulo sobre M tal que $M = IM$ para $I = \langle X \rangle$.
2. Considere $\varphi = \mathrm{id}_M : M \to M$ y encuentre $P(X) = X^n + c_1 X^{n-1} + \ldots + c_{n-1}X + c_n$ en $A[X]$ tal que $P(\varphi)$ y $c_j \in I^j$.
3. Calcule $P(\varphi)(m)$ para $m \in M$ y concluya que u es inyectiva.

Demostración. Podemos dotar a M de estructura de $A[X]-$módulo mediante $X \cdot m = u(m)$ para todo $m \in M$ e imponiendo las condiciones necesarias para que esta estructura esté bien definida, es decir, $P \cdot m = P(u)(m)$ para todo $m \in M$.
Sea $I = \langle X \rangle \subseteq A[X]$ ideal. Notamos entonces que el hecho que u sea sobreyectivo implica que $M = u(M) = IM$. Sea $\varphi = \mathrm{id}_M$ el morfismo identidad. El teorema de Cayley-Hamilton implica que existe un polinomio:

$$P = T^n + c_1(X)T^{n-1} + \ldots + c_{n-1}(X)T + c_n(X) \in A[X][T]$$

tal que $P(\varphi) = 0$. Más aún, por una observación hecha en clases, tenemos que $c_j(X) \in I^j = \langle X^j \rangle$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Por lo anterior podemos entonces escribir $c_j = X d_j$ para cierto $d_j \in A[X]$. Para $m \in M$ arbitrario calculamos entonces que:

$$\begin{aligned}
0 = P(\varphi)(m) &= (\varphi^n + c_1(X)\varphi^{n-1} + \ldots + c_{n-1}(X)\varphi + c_n(X)\,\mathrm{id}_M)(m) \\
&= m + c_1(X) \cdot m + \ldots + c_{n-1}(X) \cdot m + c_n(X) \cdot m \\
&= m + X \cdot \underbrace{(d_1(X) \cdot m + \ldots + d_n(X) \cdot m)}_{=:Q(X)(m)} \\
&= m + XQ(X) \cdot m \\
&= m + u(Q(u)(m)) \\
&= m + Q(u)(u(m))
\end{aligned}$$

Del cálculo anterior deducimos entonces que u es inyectivo pues si $u(m) = 0$ entonces $m = 0$ así que u es un isomorfismo. Más aún, podemos notar que $(Q(u) \circ u)(m) = -m$ para todo $m \in M$, es decir, $u^{-1} = -Q(u)$. $\square$

Problema 2. Sea A un anillo y $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia arbitraria de $A-$módulos. Decimos que un $A-$módulo M es suma directa de la familia $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ si existen morfismos de $A-$módulos $i_\lambda : M_\lambda \to M$ verificando la siguiente propiedad universal: para todo $A-$módulo N y toda colección de morfismos $f_\lambda : M_\lambda \to N$, existe un único morfismo de $A-$módulos $f : M \to N$ tal que para cada $\lambda \in \Lambda$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, "f"] & \\
M_\lambda \arrow[u, "i_\lambda"] \arrow[r, "f_\lambda"'] & N
\end{tikzcd}$$

1. Muestre que la suma directa es única módulo un único isomorfismo.

2. Demuestre que la suma directa definida en cátedra, es decir,

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda := \{(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \text{ tal que } m_\lambda = 0 \text{ salvo finitos } \lambda \in \Lambda\}$$

   es una suma directa de $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ en el sentido anterior.

3. Concluya que la suma directa verifica $\operatorname{Hom}\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, N\right) \cong \prod_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Hom}(M_\lambda, N)$.

Demostración.

1. Supongamos que M, M' son dos $A-$módulos verificando la propiedad universal del enunciado, y denotamos sus morfismos asociados por $i_\lambda : M_\lambda \to M$,$i'_\lambda : M_\lambda \to M'$ respectivamente. Podemos entonces aplicar la propiedad universal de M al $A-$módulo M' junto con sus morfismos asociados para obtener los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[dr, "f"] & \\ M_\lambda \arrow[u, "i_\lambda"] \arrow[r, "f_\lambda"'] & M' \end{tikzcd}$$

   y similar podemos aplicar la propiedad universal de M' a M:

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[dr, "g"] & \\ M_\lambda \arrow[u, "i'_\lambda"] \arrow[r, "i_\lambda"'] & M \end{tikzcd}$$

   Componiendo los diagramas anteriores obtenemos:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[dr, "g \circ f"] & \\ M_\lambda \arrow[u, "i_\lambda"] \arrow[r, "i_\lambda"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M' \arrow[dr, "f \circ g"] & \\ M_\lambda \arrow[u, "i'_\lambda"] \arrow[r, "i'_\lambda"'] & M' \end{tikzcd}$$

   Ahora, notar que los morfismos identidad $\mathrm{id}_M, \mathrm{id}_{M'}$ cumplen trivialmente las condiciones de conmutatividad $\mathrm{id}_M \circ i_\lambda = i_\lambda$ y $\mathrm{id}_{M'} \circ i'_\lambda = i'_\lambda$, así que por la unicidad del morfismo en la propiedad universal se tiene que $f \circ g = \mathrm{id}_{M'}$ y $g \circ f = \mathrm{id}_M$, por lo que $M \cong M'$ y más aún, el isomorfismo es único.

2. La manera más natural de definir los morfismos asociados a $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ corresponde a las inclusiones:

$$i_\lambda : M_\lambda \to \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, \qquad x \mapsto (x_{\lambda'})_{\lambda'\in\Lambda}, \quad x_\lambda = x, x_{\lambda'} = 0 \quad \forall \lambda' \neq \lambda$$

   Consideremos entonces un $A-$módulo arbitrario N junto con una familia de morfismos $f_\lambda : M_\lambda \to N$. Afirmamos entonces que el morfismo dado por la propiedad universal será:

$$f : \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to N, \qquad (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x_\lambda)$$

el cual por definición de la suma directa esta bien definido, pues la suma es finita, y es directo verificar que f es un morfismo de $A-$módulos. Vemos entonces directamente que

$$(f \circ i_\lambda)(x) = f(i_\lambda(x)) = f_\lambda(x)$$

Resta entonces verificar la unicidad del morfismo anterior. Supongamos existe otro morfismo $f' : \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to N$ satisfaciendo $f' \circ i_\lambda = f_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Notamos directamente que:

$$f'((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) = f'\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}(\cdots, 0, x_\lambda, 0, \cdots)\right) = \sum_{\lambda\in\Lambda} f'(i_\lambda(x_\lambda)) = \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x_\lambda) = f((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$$

3. El hecho de que hay una biyección entre estos dos conjuntos de morfimos es nada más que reescribir la propiedad universal, pues esta establece que para cada colección de morfismos $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}\,(M_\lambda, N)$ se tiene un único $f \in \mathrm{Hom}\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, N\right)$, y en la otra dirección, dado f podemos definir $f_\lambda = f \circ i_\lambda$, y por construcción estas asignaciones son inversas una de la otra. Resumiendo, tenemos

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}\,(M_\lambda, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, N\right), \qquad (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto f$$

El hecho de que esta biyección es un morfismo de $A-$módulos se sigue del hecho que si $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}\,(M_\lambda, N)$ morfismos, por definición tenemos que $f \circ i_\lambda = f_\lambda$, $g \circ i_\lambda = g_\lambda$, así que sumando estas identidades tenemos $(f+g) \circ i_\lambda = f_\lambda + g_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$, y por la unicidad de la propiedad universal, la asignación definida lleva $(f_\lambda + g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ en $f + g$. La situación es idéntica al considerar multiplicación por escalares.

□

Problema 3. Sea A un anillo, M un $A-$módulo finitamente generado y $\varphi : M \twoheadrightarrow A^n$ morfismo sobreyectivo de $A-$módulos. Demuestre que $\ker(\varphi)$ es finitamente generado.

Demostración. Sea $e_1, \ldots, e_n$ base de A^n y sean $u_1, \ldots, u_n \in M$ tales que $\varphi(u_i) = e_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Consideremos $N := \langle u_1, \ldots, u_m\rangle_{A-mod}$ el $A-$submódulo generado. Dado que $M/\ker(\varphi) \cong A^n$, tenemos que $M = N + \ker(\varphi)$, y además si $x = \sum a_i u_i \in N \cap \ker(\varphi)$ entonces $0 = \varphi(x) = \sum a_i e_i \Rightarrow a_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, así que $x = 0$. Por lo tanto, tenemos que $M = N \oplus \ker(\varphi)$ y de aquí podemos concluir que $\ker(\varphi)$ es finitamente generado pues M y N lo son. En efecto, $M = \langle x_1, \ldots, x_m\rangle_{A-mod}$ para ciertos $x_i \in M$, y luego $x_i = y_i + z_i$ para ciertos $y_i \in \ker(\varphi), z_i \in N$. Es directo entonces notar que $\ker(\varphi) = \langle y_1, \ldots, y_n\rangle_{A-mod}$. □

Problema 4. Sean A, B anillos locales con ideales maximales $\mathfrak{m}_A, \mathfrak{m}_B$, respectivamente. Sea $f : A \to B$ un morfismo de anillos. Decimos que f es un *morfismo local* si $f^{-1}(m_B) = m_A$. Sean $(A, \mathfrak{m}_A), (B, \mathfrak{m}_B)$ anillos locales noetherianos y $f : A \to B$ morfismo local. Suponga que:

1. $A/\mathfrak{m}_A \to B/\mathfrak{m}_B$ es un isomorfismo.
2. $\mathfrak{m}_A \to \mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2$ es sobreyectivo.
3. B es un $A-$módulo finitamente generado, considerando la estructura de $A-$módulo inducida por f, ie, $a \cdot b = f(a)b$.

Demuestre que f es sobreyectivo.
Indicación: Use el Lema de Nakayama para demostrar que si A es un anillo local con ideal maximal $\mathfrak{m}$, M un $A-$módulo finitamente generado y $N \subseteq M$ submódulo entonces $M = N + \mathfrak{m}M$ implica $M = N$.

Demostración. Explicamos en primer lugar cuáles son los morfismos a los que se hace referencia en el enunciado. Como es costumbre disponemos de un morfismo de proyección $B \xrightarrow{\pi} B/\mathfrak{m}_B$, y luego podemos considerar la composición:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\pi} B/\mathfrak{m}_B$$

y notamos que:

$$\mathfrak{m}_B \subseteq \ker(\pi) \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{m}_A = f^{-1}(\mathfrak{m}_B) \subseteq \ker(\pi \circ f)$$

así que por la propiedad universal del cociente obtenemos un morfismo $A/\mathfrak{m}_A \to B/\mathfrak{m}_B$. El morfismo del punto 2. viene simplemente de considerar la restricción de f a $\mathfrak{m}_A$ y componer con la proyección $\mathfrak{m}_B \to \mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2$.
Probemos ahora el resultado. Dado que B es un anillo noetheriano, $\mathfrak{m}_B$ es un $B-$módulo finitamente generado $f(\mathfrak{m}_A)$ es un $B-$submódulo finitamente generado de $\mathfrak{m}_B$. Además, el punto 2. nos da que $\mathfrak{m}_B = f(\mathfrak{m}_A) + \mathfrak{m}_B^2$. Ahora, como $\mathfrak{m}_B$ es finitamente generado, podemos aplicar el Lema de Nakayama al cociente $\mathfrak{m}_B/f(\mathfrak{m}_A)$ pues

$$\mathfrak{m}_B\left(\mathfrak{m}_B/f(\mathfrak{m}_A)\right) = (m_B^2 + f(\mathfrak{m}_A))/f(\mathfrak{m}_A) = \mathfrak{m}_B/f(\mathfrak{m}_A)$$

y por lo tanto $\mathfrak{m}_B/f(\mathfrak{m}_A) = 0$, de donde $\mathfrak{m}_B = f(\mathfrak{m}_A)$.
Por otro lado, el punto 1. nos da que $B = f(A) + \mathfrak{m}_B B$, y dado que la estructura de $A-$módulo en B se define mediante f, tenemos que $\mathfrak{m}_B B = \mathfrak{m}_A B$, así que tenemos $B = f(A) + \mathfrak{m}_A B$, y como B es un $A-$módulo finitamente generado usando el Lema de Nakayama de manera similar a lo hecho anteriormente, obtenemos que $f(A) = B$. $\square$