

PAUTA AYUDANTÍA 10 ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

30 DE MAYO DE 2023

Problema 1. Sea A anillo y M un A -módulo finitamente generado. El objetivo de este problema es mostrar que todo endomorfismo $u : M \rightarrow M$ sobreyectivo es un isomorfismo. Para ello proceda como sigue:

1. Utilice u para definir una estructura de $A[X]$ -módulo sobre M tal que $M = IM$ para $I = \langle X \rangle$.
2. Considere $\varphi = \text{id}_M : M \rightarrow M$ y encuentre $P(X) = X^n + c_1X^{n-1} + \dots + c_{n-1}X + c_n$ en $A[X]$ tal que $P(\varphi)$ y $c_j \in I^j$.
3. Calcule $P(\varphi)(m)$ para $m \in M$ y concluya que u es inyectiva.

Demostración. Podemos dotar a M de estructura de $A[X]$ -módulo mediante $X \cdot m = u(m)$ para todo $m \in M$ e imponiendo las condiciones necesarias para que esta estructura esté bien definida, es decir, $P \cdot m = P(u)(m)$ para todo $m \in M$.

Sea $I = \langle X \rangle \subseteq A[X]$ ideal. Notamos entonces que el hecho que u sea sobreyectivo implica que $M = u(M) = IM$. Sea $\varphi = \text{id}_M$ el morfismo identidad. El teorema de Cayley-Hamilton implica que existe un polinomio:

$$P = T^n + c_1(X)T^{n-1} + \dots + c_{n-1}(X)T + c_n(X) \in A[X][T]$$

tal que $P(\varphi) = 0$. Más aún, por una observación hecha en clases, tenemos que $c_j(X) \in I^j = \langle X^j \rangle$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Por lo anterior podemos entonces escribir $c_j = Xd_j$ para cierto $d_j \in A[X]$. Para $m \in M$ arbitrario calculamos entonces que:

$$\begin{aligned} 0 &= P(\varphi)(m) = (\varphi^n + c_1(X)\varphi^{n-1} + \dots + c_{n-1}(X)\varphi + c_n(X)\text{id}_M)(m) \\ &= m + c_1(X) \cdot m + \dots + c_{n-1}(X) \cdot m + c_n(X) \cdot m \\ &= m + X \cdot \underbrace{(d_1(X) \cdot m + \dots + d_n(X) \cdot m)}_{=: Q(X)(m)} \\ &= m + XQ(X) \cdot m \\ &= m + u(Q(u)(m)) \\ &= m + Q(u)(u(m)) \end{aligned}$$

Del cálculo anterior deducimos entonces que u es inyectivo pues si $u(m) = 0$ entonces $m = 0$ así que u es un isomorfismo. Más aún, podemos notar que $(Q(u) \circ u)(m) = -m$ para todo $m \in M$, es decir, $u^{-1} = -Q(u)$. \square

Problema 2. Sea A un anillo y $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia arbitraria de A -módulos. Decimos que un A -módulo M es suma directa de la familia $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ si existen morfismos de A -módulos $i_\lambda : M_\lambda \rightarrow M$ verificando la siguiente propiedad universal: para todo A -módulo N y toda colección de morfismos $f_\lambda : M_\lambda \rightarrow N$, existe un único morfismo de A -módulos $f : M \rightarrow N$ tal que para cada $\lambda \in \Lambda$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ & \uparrow & \searrow f \\ i_\lambda & & \\ & M_\lambda & \xrightarrow{f_\lambda} N \end{array}$$

1. Muestre que la suma directa es única módulo un único isomorfismo.

2. Demuestre que la suma directa definida en cátedra, es decir,

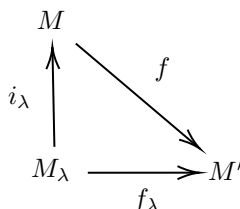
$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda := \{(m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \text{ tal que } m_\lambda = 0 \text{ salvo finitos } \lambda \in \Lambda\}$$

es una suma directa de $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ en el sentido anterior.

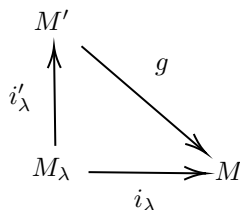
3. Concluya que la suma directa verifica $\text{Hom}(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda, N) \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Hom}(M_\lambda, N)$.

Demostración.

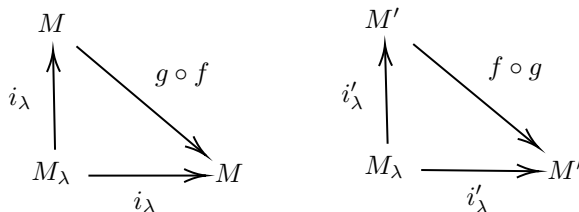
1. Supongamos que M, M' son dos A -módulos verificando la propiedad universal del enunciado, y denotamos sus morfismos asociados por $i_\lambda : M_\lambda \rightarrow M, i'_\lambda : M_\lambda \rightarrow M'$ respectivamente. Podemos entonces aplicar la propiedad universal de M al A -módulo M' junto con sus morfismos asociados para obtener los siguientes diagramas conmutativos:



y similar podemos aplicar la propiedad universal de M' a M :



Componiendo los diagramas anteriores obtenemos:



Ahora, notar que los morfismos identidad $\text{id}_M, \text{id}_{M'}$ cumplen trivialmente las condiciones de conmutatividad $\text{id}_M \circ i_\lambda = i_\lambda$ y $\text{id}_{M'} \circ i'_\lambda = i'_\lambda$, así que por la unicidad del morfismo en la propiedad universal se tiene que $f \circ g = \text{id}_{M'}$ y $g \circ f = \text{id}_M$, por lo que $M \cong M'$ y más aún, el isomorfismo es  nico.

2. La manera más natural de definir los morfismos asociados a $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ corresponde a las inclusiones:

$$i_\lambda : M_\lambda \rightarrow \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda, \quad x \mapsto (x_{\lambda'})_{\lambda' \in \Lambda}, \quad x_\lambda = x, x_{\lambda'} = 0 \quad \forall \lambda' \neq \lambda$$

Consideremos entonces un A -módulo arbitrario N junto con una familia de morfismos $f_\lambda : M_\lambda \rightarrow N$. Afirmamos entonces que el morfismo dado por la propiedad universal será:

$$f : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \rightarrow N, \quad (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mapsto \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x_\lambda)$$

el cual por definición de la suma directa está bien definido, pues la suma es finita, y es directo verificar que f es un morfismo de A -módulos. Vemos entonces directamente que

$$(f \circ i_\lambda)(x) = f(i_\lambda(x)) = f_\lambda(x)$$

Resta entonces verificar la unicidad del morfismo anterior. Supongamos existe otro morfismo $f' : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \rightarrow N$ satisfaciendo $f' \circ i_\lambda = f_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Notamos directamente que:

$$f'((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) = f' \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} (\dots, 0, x_\lambda, 0, \dots) \right) = \sum_{\lambda \in \Lambda} f'(i_\lambda(x_\lambda)) = \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x_\lambda) = f((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$$

3. El hecho de que hay una biyección entre estos dos conjuntos de morfismos es nada más que reescribir la propiedad universal, pues esta establece que para cada colección de morfismos $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Hom}(M_\lambda, N)$ se tiene un único $f \in \text{Hom}(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda, N)$, y en la otra dirección, dado f podemos definir $f_\lambda = f \circ i_\lambda$, y por construcción estas asignaciones son inversas una de la otra. Resumiendo, tenemos

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Hom}(M_\lambda, N) \xrightarrow{\sim} \text{Hom} \left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda, N \right), \quad (f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mapsto f$$

El hecho de que esta biyección es un morfismo de A -módulos se sigue del hecho que si $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, (g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Hom}(M_\lambda, N)$ morfismos, por definición tenemos que $f \circ i_\lambda = f_\lambda, g \circ i_\lambda = g_\lambda$, así que sumando estas identidades tenemos $(f + g) \circ i_\lambda = f_\lambda + g_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$, y por la unicidad de la propiedad universal, la asignación definida lleva $(f_\lambda + g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ en $f + g$. La situación es idéntica al considerar multiplicación por escalares. □

Problema 3. Sea A un anillo, M un A -módulo finitamente generado y $\varphi : M \rightarrow A^n$ morfismo sobreyectivo de A -módulos. Demuestre que $\ker(\varphi)$ es finitamente generado.

Demostración. Sea e_1, \dots, e_n base de A^n y sean $u_1, \dots, u_n \in M$ tales que $\varphi(u_i) = e_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. Consideremos $N := \langle u_1, \dots, u_n \rangle_{A\text{-mod}}$ el A -submódulo generado. Dado que $M/\ker(\varphi) \cong A^n$, tenemos que $M = N + \ker(\varphi)$, y además si $x = \sum a_i u_i \in N \cap \ker(\varphi)$ entonces $0 = \varphi(x) = \sum a_i e_i \Rightarrow a_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, así que $x = 0$. Por lo tanto, tenemos que $M = N \oplus \ker(\varphi)$ y de aquí podemos concluir que $\ker(\varphi)$ es finitamente generado pues M y N lo son. En efecto, $M = \langle x_1, \dots, x_m \rangle_{A\text{-mod}}$ para ciertos $x_i \in M$, y luego $x_i = y_i + z_i$ para ciertos $y_i \in \ker(\varphi), z_i \in N$. Es directo entonces notar que $\ker(\varphi) = \langle y_1, \dots, y_n \rangle_{A\text{-mod}}$. □

Problema 4. Sean A, B anillos locales con ideales maximales $\mathfrak{m}_A, \mathfrak{m}_B$, respectivamente. Sea $f : A \rightarrow B$ un morfismo de anillos. Decimos que f es un *morfismo local* si $f^{-1}(\mathfrak{m}_B) = \mathfrak{m}_A$. Sean $(A, \mathfrak{m}_A), (B, \mathfrak{m}_B)$ anillos locales noetherianos y $f : A \rightarrow B$ morfismo local. Suponga que:

1. $A/\mathfrak{m}_A \rightarrow B/\mathfrak{m}_B$ es un isomorfismo.
2. $\mathfrak{m}_A \rightarrow \mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2$ es sobreyectivo.
3. B es un A -módulo finitamente generado, considerando la estructura de A -módulo inducida por f , ie, $a \cdot b = f(a)b$.

Demuestre que f es sobreyectivo.

Indicación: Use el Lema de Nakayama para demostrar que si A es un anillo local con ideal maximal \mathfrak{m} , M un A -módulo finitamente generado y $N \subseteq M$ submódulo entonces $M = N + \mathfrak{m}M$ implica $M = N$.

Demostración. Explicamos en primer lugar cuáles son los morfismos a los que se hace referencia en el enunciado. Como es costumbre disponemos de un morfismo de proyección $B \xrightarrow{\pi} B/\mathfrak{m}_B$, y luego podemos considerar la composición:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\pi} B/\mathfrak{m}_B$$

y notamos que:

$$\mathfrak{m}_B \subseteq \ker(\pi) \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{m}_A = f^{-1}(\mathfrak{m}_B) \subseteq \ker(\pi \circ f)$$

así que por la propiedad universal del cociente obtenemos un morfismo $A/\mathfrak{m}_A \rightarrow B/\mathfrak{m}_B$. El morfismo del punto 2. viene simplemente de considerar la restricción de f a \mathfrak{m}_A y componer con la proyección $\mathfrak{m}_B \rightarrow \mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2$.

Probemos ahora el resultado. Dado que B es un anillo noetheriano, \mathfrak{m}_B es un B -módulo finitamente generado $f(\mathfrak{m}_A)$ es un B -submódulo finitamente generado de \mathfrak{m}_B . Además, el punto 2. nos da que $\mathfrak{m}_B = f(\mathfrak{m}_A) + \mathfrak{m}_B^2$. Ahora, como \mathfrak{m}_B es finitamente generado, podemos aplicar el Lema de Nakayama al cociente $\mathfrak{m}_B/f(\mathfrak{m}_A)$ pues

$$\mathfrak{m}_B (\mathfrak{m}_B/f(\mathfrak{m}_A)) = (\mathfrak{m}_B^2 + f(\mathfrak{m}_A))/f(\mathfrak{m}_A) = \mathfrak{m}_B/f(\mathfrak{m}_A)$$

y por lo tanto $\mathfrak{m}_B/f(\mathfrak{m}_A) = 0$, de donde $\mathfrak{m}_B = f(\mathfrak{m}_A)$.

Por otro lado, el punto 1. nos da que $B = f(A) + \mathfrak{m}_B B$, y dado que la estructura de A -módulo en B se define mediante f , tenemos que $\mathfrak{m}_B B = \mathfrak{m}_A B$, así que tenemos $B = f(A) + \mathfrak{m}_A B$, y como B es un A -módulo finitamente generado usando el Lema de Nakayama de manera similar a lo hecho anteriormente, obtenemos que $f(A) = B$. \square