Profesor: Pedro Montero
Ayudante: Sebastián Fuentes

Ayudantía 7 Estructuras Algebraicas

4 de mayo de 2023

Problema 1. Sea $A = C([0,1])$ el anillo de todas las funciones continuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, y para cada $c \in [0,1]$ sea $I_c = \{f \in A \mid f(c) = 0\}$

1. Pruebe que I_c es un ideal maximal para cada $c \in [0,1]$.
2. Demuestre que si I es un ideal maximal de A, entonces existe un número real $c \in [0,1]$ tal que $I = I_c$.
3. Muestre que si b y c son puntos distintos en $[0,1]$ entonces $I_b \neq I_c$.
4. Pruebe que I_c no es igual al ideal principal generado por $x - c$.
5. Demuestre que I_c no es un ideal finitamente generado.

Demostración.

1. Supongamos que J es un ideal tal que $I_c \subsetneq J$ y veamos que $J = A$. Podemos considerar $f \in J \setminus I_c$, es decir, $f(c) \neq 0$. Entonces $g(x) := f(x)/f(c) \in J$ pues J es un ideal y $1 - g(x) \in I_c$, así que obtenemos
$$1 = g(x) + (1 - g(x)) \in J$$
de donde se sigue que $J = A$ y por lo tanto I_c es maximal.
Alternativamente, para cada $c \in [0,1]$ podemos definir el morfismo de evaluación:
$$\mathrm{ev}_c : A \twoheadrightarrow \mathbb{R}$$
cuyo kernel es $\ker(\mathrm{ev}_c) = I_c$ y como $A/I_c \cong \mathbb{R}$ es un cuerpo entonces I_c es maximal.

2. Sea $\mathfrak{m} \subseteq A$ ideal maximal y supongamos que $\mathfrak{m} \neq I_c$ para todo $c \in [0,1]$. Para cada $c \in [0,1]$ existe entonces $f_c \in \mathfrak{m}$ tal que $f_c(c) \neq 0$, y como f_c es continua, existe una vecindad abierta V_c de c donde $f_c(x) \neq 0$ para todo $x \in V_c$. Tenemos así un cubrimiento abierto del intervalo compacto $[0,1]$, así que podemos extraer un subcubrimiento finito $V_{c_1}, \ldots, V_{c_n}$ y definir:
$$g(x) = f_{c_1}^2(x) + f_{c_2}^2(x) + \ldots + f_{c_n}^2(x)$$
la cual verifica $g(x) > 0$ para todo $x \in [0,1]$ y por lo tanto es una unidad en A, pues $\frac{1}{g(x)}$ es su inverso. Vemos entonces que $I = A$, y entonces no existen ideales maximales distintos de I_c.

3. Esto se sigue simplemente de notar que $x - b \in I_b$ pero $x - b \notin I_c$.

4. Suponer que $I_c = \langle x - c \rangle$. En particular existe entonces $f(x) \in A$ tal que $|x - c| = f(x)(x - c)$, así que $f(x) = \frac{|x-c|}{x-c}$ para $x \neq c$. Ahora, notar que f es discontinua en $x = c$ pues su límite izquierdo es $-\infty$ mientras que el derecho es $+\infty$.

5. Suponer que I_c es finitamente generado por $\{f_i\}_{1 \leq i \leq n} \subseteq I_c$ y sea $f(x) = \sum_{i=1}^n |f_i(x)|$. Sabemos que $\sqrt{f} \in I_c$ pues es continua y $f(c) = 0$, así que existe $g_1, \ldots, g_n \in A$ tales que $\sqrt{f} = \sum_{i=1}^n g_i f_i$. Ahora, notar que para cada $d \in [0,1]$ existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $f_i(d) \neq 0$, pues sino $h(d) = 0$ para todo $h \in I_c$, que sabemos que no es cierto pues $x - c \in I_c$. Por lo tanto el único punto en donde f se anula es c. Ahora, podemos obtener la siguiente estimación:
$$\sqrt{f(x)} = \sum_{i=1}^n g_i(x) f_i(x) \leq \sum_{i=1}^n |g_i(x)||f_i(x)| \leq \sum_{i=1}^n |g_i(x)| \sum_{i=1}^n |f_i(x)| = g(x) f(x)$$

donde $g(x) := \sum_{i=1}^{n} |g_i(x)|$. De la desigualdad anterior vemos que

$$g(x) \geq \frac{1}{\sqrt{f(x)}} \quad \forall x \in [0,1] \setminus \{c\}$$

Sin embargo, cuando $x \to c$ vemos que $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ es no acotada y por lo tanto $g(x)$ no está definida en $x = c$, lo que supone una contradicción pues $g \in A$.

$\square$

Problema 2. Sea A un anillo, $\operatorname{Nil}(A)$ su nilradical. Demuestre que los siguientes hechos son equivalentes:

1. A tiene exactamente un ideal primo.
2. cada elemento de A es una unidad o nilpotente.
3. $A/\operatorname{Nil}(A)$ es un cuerpo.

Demostración. ((1) $\Rightarrow$ (2)). Sabemos que el radical de un ideal corresponde a la intersección de todos los ideales primos que contienen al ideal, así que el nilradical se puede escribir como:

$$\operatorname{Nil}(A) := \sqrt{\langle 0 \rangle} = \bigcap_{\substack{\langle 0 \rangle \subseteq \mathfrak{p} \\ \text{primo}}} \mathfrak{p} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \subseteq A \\ \text{ideal primo}}} \mathfrak{p}$$

es decir, corresponde a la intersección de todos los ideales primos de A. Por lo tanto, si A tiene un único ideal primo, entonces este corresponde a $\operatorname{Nil}(A)$. Ahora, gracias al Teorema de Krull sabemos que todo ideal $I \neq A$ está contenido en algún ideal maximal, y como todo ideal maximal es primo, entonces $\operatorname{Nil}(A)$ es el único ideal maximal de A. Luego si $x \notin \operatorname{Nil}(A)$ entonces x es invertible pues sino su ideal generado estaría contenido en $\operatorname{Nil}(A)$, lo que supone una contradicción.
((2) $\Rightarrow$ (3)) Supongamos que todo elemento de A invertible o bien nilpotente. Si consideramos $[x] \in A/\operatorname{Nil}(A)$ tal que $[x] \neq [0]$ entonces sabemos que $x \notin \operatorname{Nil}(A)$ y por lo tanto es invertible, y existe $y \in A$ tal que $xy = 1$ en A. Pasando al cociente tenemos $[x][y] = [xy] = [1]$ y por lo tanto $[x]$ es invertible en $A/\operatorname{Nil}(A)$. Como todo elemento es invertible deducimos que $A/\operatorname{Nil}(A)$ es un cuerpo.
((3) $\Rightarrow$ (1)) Suponer que $A/\operatorname{Nil}(A)$ es un cuerpo. Sabemos que hay una correspondencia biyectiva entre ideales de A conteniendo a $\operatorname{Nil}(A)$ e ideales del cociente $A/\operatorname{Nil}(A)$ mediante la proyección, y más aún, como esta es sobreyectiva preserva ideales primos. Ahora, como $A/\operatorname{Nil}(A)$ es un cuerpo, sus únicos ideales son $\langle 0 \rangle$ y el anillo completo, por lo tanto, A posee un único ideal primo y, más aún, viene dado por $\pi^{-1}(\langle [0] \rangle) = \operatorname{Nil}(A)$. $\square$

Problema 3. Sean $I, J \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ ideales y considere los conjuntos algebraicos afines $X := V(I), Y := V(J)$ de $\mathbb{A}^n$.

1. Pruebe que $V(I) = V(\sqrt{I})$ y $V(J) = V(\sqrt{J})$.
2. Utilice el Hilbert Nullstellensatz para demostrar que

$$\sqrt{IJ} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J} \qquad \text{y} \qquad \sqrt{I+J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$$

Demostración.

1. Dado que $I \subseteq \sqrt{I}$ y como tomar V es decreciente tenemos que $V(\sqrt{I}) \subseteq V(I)$. Para ver la inclusión contraria consideramos $x \in V(I)$ y $f \in \sqrt{I}$. Por definición existe $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que $f^n \in I$, y como $x \in V(\sqrt{I})$ entonces $f^n(x) = 0$. Ahora, como $f^n(x) \in \mathbb{C}$ tenemos entonces que $f(x) = 0$ y por lo tanto $f \in V(\sqrt{I})$.
2. Por definición el producto de ideales corresponde al ideal generado por el producto elemento a elemento, y además sabemos que para $S \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ se tiene que $V(S) = V(\langle S \rangle)$, usando el Nullstellensatz calculamos:

$$\sqrt{IJ} = \mathfrak{I}(V(IJ) = \mathfrak{I}(V(I) \cup V(J)) = \mathfrak{I}(X) \cap \mathfrak{I}(Y) = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$$

De manera similar, por definición $I + J = \langle I \cup J \rangle$ y calculamos:

$$\begin{aligned}
\sqrt{I+J} = \mathfrak{I}(V(I+J)) &= \mathfrak{I}(V(I \cup J)) \\
&= \mathfrak{I}(V(I) \cap V(J)) \\
&= \mathfrak{I}(V(\sqrt{I}) \cap V(\sqrt{J})) \\
&= \mathfrak{I}(V(\sqrt{I} + \sqrt{J})) \\
&= \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}
\end{aligned}$$

$\square$