Certamen 1 MAT214

Ningún objeto electrónico está autorizado. Toda respuesta debe estar debidamente justificada. Los puntajes de cada pregunta son indicativos y pueden ser modificados ulteriormente. Los problemas son independientes y pueden ser abordados en el orden que usted prefiera.

Nombre y apellido : ____

ROL : ____

Problema 1 (30 puntos)

El objetivo de este problema es estudiar algunas propiedades del grupo aditivo $\mathbb{G}_a(k) = (k, +)$, donde k es un cuerpo.

1. Demostrar que $(\mathbb{Q}, +)$ no es finitamente generado.

2. Demostrar que el grupo de matrices triangulares superiores en $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ cuyos coeficientes en la diagonal son todos iguales a 1 es isomorfo a $(\mathbb{Q}, +)$.

3. Sea G el grupo (finitamente generado) de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ generado por las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Demostrar que el sub-grupo H de G formado por los elementos de G cuyos coeficientes en la diagonal son todos iguales a 1 no es de tipo finito. [*Indicación: Calcular $A^{-n}BA^n$ y usar un argumento similar a (1)*]

4. Sea $G \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ un grupo de matrices. Entonces, G actúa sobre $V = \mathbb{C}^n$ vía multiplicación matricial y en el espacio dual $V^* = \{\ell : V \to C \text{ funcional lineal}\}$ vía

$$(g \cdot \ell)(x_1, \ldots, x_n) = \ell(g^{-1} \cdot (x_1, \ldots, x_n)).$$

   Decimos que G es un **grupo reductivo** si para todo vector invariante no-nulo $v \in V^G \setminus \{0\}$ existe un funcional lineal invariante $\ell \in (V^*)^G$ tal que $\ell(v) \neq 0$. Probar que el grupo G de matrices triangulares superiores en $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ cuyos coeficientes en la diagonal son todos iguales a 1 **no** es un grupo reductivo.

Problema 2 (40 puntos)

El objetivo de este problema es estudiar grupos finitos de orden menor o igual a 11.

1. Sea q un número primo. Probar que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$.
2. Sean p y q números primos tales que $p < q$, y sea G un grupo de orden pq. Usar el punto anterior y el teorema de Sylow para probar que:
   (a) Si $p \nmid (q-1)$ entonces $G \cong \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$.
   (b) Si $p \mid (q-1)$ y G es abeliano entonces $G \cong \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$.
3. Clasificar todos los grupos G de orden $|G| \in \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11\}$. Además, clasificar todos los grupos abelianos de orden 6, 8 y 10.
4. Sea p un número primo. Sea G un grupo no-abeliano de orden p^3. Probar que $|Z(G)| = p$ y $G/Z(G) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. [*Indicación: Sabemos que si $G/Z(G)$ es cíclico entonces G es abeliano.*]

Problema 3 (30 puntos)

El objetivo de este problema es estudiar el **grupo de cuaterniones** $\mathbf{H}_8$ dado por

$$\mathbf{H}_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\},$$

donde $(-1)^2 = 1$ y $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

1. Calcular la tabla de multiplicación de $\mathbf{H}_8$.
2. Probar que $Z(\mathbf{H}_8) = \{1, -1\}$ y que las clases de conjugación de $\mathbf{H}_8$ son $\{1\}, \{-1\}, \{i, -i\}, \{j, -j\}, \{k, -k\}$.
3. Probar que los subgrupos $N_1 = \langle i \rangle$, $N_2 = \langle j \rangle$ y $N_3 = \langle k \rangle$ son normales en $\mathbf{H}_8$
4. Construir para cada subgrupo normal N_i del punto anterior, una representación ρ_i de grado 1 de tal suerte que $\ker(\rho_i) = N_i$.
5. Determinar la tabla de caracteres irreducibles de $\mathbf{H}_8$.