§48. Álgebra simétrica y anillos de polinomios

Motivación: El álgebra exterior $\bigwedge V$ generaliza el concepto de formas multilineales alternadas. El objetivo de está sección es estudiar el caso simétrico.

Recordemos que una forma bilineal $B : V \times V \to k$ es simétrica si $B(x,y) = B(y,x)$ para todos $x, y \in V$. Equivalentemente, si $\hat{B} : V \otimes V \to k$ es la forma lineal asociada entonces $\hat{B}(x \otimes y) = \hat{B}(y \otimes x) \iff \hat{B}(x \otimes y - y \otimes x) = 0 \ \forall x, y \in V$.

En particular, si denotamos por $J_2 \subseteq T^2 V = V \otimes V$ al sub-ev generado por todos los tensores de la forma $x \otimes y - y \otimes x$ con $x, y \in V$, entonces $J_2 \subseteq \ker(\hat{B})$.

Concretamente: construiremos a partir de TV una nueva álgebra SV tal que para cada tensor $v_1 \otimes \dots \otimes v_d$ en TV asociamos un "símbolo" $v_1 v_2 \cdots v_d$ (ie, vector de SV) tal que $v_1 \cdots v_d = v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(d)}$ para toda permutación $\sigma \in S_d$. En part, $v_1 v_2 = v_2 v_1$.

Def: Sea V un k-ev y TV su álgebra tensorial. Sea $J \subseteq TV$ el sub-espacio generado por todos los tensores de la forma

$$a \otimes (v \otimes w - w \otimes v) \otimes b \quad \text{con } v, w \in V \text{ y } a, b \in TV.$$

Definimos el álgebra simétrica de V como $SV := TV/J$ (o por $\mathrm{Sym}(V)$), y denotamos por $v_1 \cdots v_d$ la imagen de $v_1 \otimes \dots \otimes v_d$ en el cociente. Más aún, la composición $V \hookrightarrow TV \twoheadrightarrow SV$ será denotada $j : V \to SV$.

Obs: Tal como en el caso de $\bigwedge V$, el cociente $SV = TV/J$ es una k-álgebra. Más aún, la definición de J implica que la multiplicación

$$(v_1 \cdots v_d, w_1 \cdots w_e) \longmapsto v_1 \cdots v_d w_1 \cdots w_e$$

es conmutativa !

Teorema (propiedad universal): El álgebra simétrica SV satisface la propiedad universal siguiente:

"Para toda aplicación lineal $f : V \to A$ a una k-álgebra conmutativa con unidad A, existe un único morfismo de álgebras $\hat{f} : SV \to A$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] & A \\ SV \arrow[ur, "\exists! \hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo (ie, $f = \hat{f} \circ j$)".

Dem: Análoga a la propiedad universal de $\bigwedge V$, reemplazando $I \subseteq TV$ por $J \subseteq TV$. ∎

Corolario (functorialidad): Si $f : V \to W$ es una aplicación lineal entre k-ev. Entonces, existe un único morfismo de k-algebras $Sf : SV \to SW$ tal que

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j_V"'] & W \arrow[d, "j_W"] \\ SV \arrow[r, "Sf"] & SW \end{tikzcd}$$

es conmutativo (ie, $j_W \circ f = Sf \circ j_V$).

Más aún, $S(f \circ g) = Sf \circ Sg$.

Veamos ahora cómo describir el álgebra simétrica SV concretamente:

Recordemos que $J \subseteq TV$ es el sub-ev generado por los tensores de la forma
$a \otimes (v \otimes w - w \otimes v) \otimes b$ con $v, w \in V$ y $a, b \in TV$.

Para $d \in \mathbb{N}$, definimos $J_d := J \cap T^d V$ como el sub-ev de J generado por elementos homogéneos de grado d. Luego, $J = \bigoplus_{d \geq 0} J_d$ y en particular

$$SV = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} S^d V \quad , \quad \text{donde } S^d V := T^d V / J_d$$

es la <u>d-ésima potencia simétrica de V</u>. En part, SV es una k-álgebra graduada.

<u>Importante</u>: Dado que los vectores no-nulos de J contienen los elementos de grado 2 de la forma $v \otimes w - w \otimes v$, tenemos que $T^0 V \cap J = \{0\}$ y $T^1 V \cap J = \{0\}$
$\Rightarrow S^0 V \cong k$ y $S^1 V \cong T^1 V \cong V$. En part, $j : V \hookrightarrow SV$ es <u>inyectivo</u>.

Explícitamente: $SV = \underset{\lambda}{\underset{\cup\!\!\!\!\,|}{k}} \oplus \underset{v}{\underset{\cup\!\!\!\!\,|}{V}} \oplus \underset{v_1 v_2}{\underset{\cup\!\!\!\!\,|}{S^2 V}} \oplus \underset{v_1 v_2 v_3}{\underset{\cup\!\!\!\!\,|}{S^3 V}} \oplus \dots$

Más aún, si $f : V \to W$ aplicación lineal, entonces $Sf = \bigoplus_{d \geq 0} S^d f$, donde
$S^d f : S^d V \to S^d W$ está dada por $(S^d f)(v_1 \cdots v_d) = f(v_1) \cdots f(v_d)$.

El siguiente resultado resume las principales propiedades de las potencias simétricas $S^d V$:

<u>Teorema</u>: Sea V un k-ev y sea $d \in \mathbb{N}$. Entonces:

① La aplicación d-lineal $V^d \longrightarrow S^d V$ dada por $(v_1, \dots, v_d) \mapsto v_1 \cdots v_d$ es una aplicación d-lineal <u>simétrica</u> (ie, $f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(d)}) = f(v_1 \cdots v_d)$ para toda $\sigma \in S_d$).
En part, $(S^d V)^*$ es el k-ev de formas d-lineales simétricas en V.

② Si V es de dimensión finita n, entonces $SV \cong k[X_1, \dots, X_n]$ es isomorfa al álgebra de polinomios en n variables. Más aún, si $(e_1, \dots, e_n)$ es una base de V, entonces $SV \xrightarrow{\sim} k[X_1, \dots, X_n]$, $e_i \mapsto X_i$ es un isomorfismo.

③ Si V es de dimensión finita n y $(e_1, \dots, e_n)$ es una base de V, entonces una base de $S^d V$ está dada por los $e_{i_1}^{k_1} \cdots e_{i_r}^{k_r}$ para toda r-tupla con $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ y enteros k_i tales que $k_1 + \dots + k_r = d$ (cf. polinomios homogéneos de grado d). Luego,

$$\dim_k(S^d V) = \binom{n+d-1}{n-1} = \binom{n+d-1}{d}.$$

Así, si $V \neq 0$, el álgebra simétrica SV es de dimensión infinita.

④ Si $\operatorname{car}(k) = 0$, podemos pensar a $S^d V$ como un <u>sub-ev</u> de $T^d V$ generado por <u>tensores simétricos</u> (ie, $T \in T^d V$ tal que $\tilde{\sigma}(T) = T$ para toda $\sigma \in S_d$). En efecto, la <u>aplicación de simetrización</u> dada por

$$q : T^d V \longrightarrow T^d V$$
$$v_1 \otimes \dots \otimes v_d \longmapsto \frac{1}{d!} \sum_{\sigma \in S_d} v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(d)}$$

tiene imagen $\mathcal{S}^d(V) \subseteq T^d V$ el sub-ev de tensores simétricos y $\ker(q) = J_d$.
En part, $\mathcal{S}^d(V) \cong S^d V = T^d V / J_d$.

<u>Dem</u>: La demostración es análoga al caso de $\Lambda^d V$ y queda como ejercicio. ∎

<u>Observación final</u>: Supongamos que $\mathrm{car}(k) = 0$. Entonces, toda matriz $M \in M_n(k)$ se escribe de manera única como suma de una matriz simétrica y anti-simétrica:

$$M = S + A, \quad \text{con } S = \frac{M + {}^tM}{2} \quad \text{y} \quad A = \frac{M - {}^tM}{2}$$

Del mismo modo, todo tensor en $T^2V = V \otimes V$ puede escribirse como (suma de tensores de la forma):

$$v \otimes w = \frac{1}{2}(v \otimes w - w \otimes v) + \frac{1}{2}(v \otimes w + w \otimes v) = p(v \otimes w) + q(v \otimes w)$$

Es decir, como suma de un tensor anti-simétrico y un tensor simétrico, i.e.,

$$T^2V = A^2V \oplus \mathcal{S}^2V,$$

con $A^2V \cong \Lambda^2 V$ y $\mathcal{S}^2V \cong S^2V$ (<u>Obs</u>: Basta que $\mathrm{car}(k) \neq 2$ en el caso $d=2$).
En general, para $d \geqslant 3$ tenemos una inclusión $T^dV \supsetneq A^dV \oplus \mathcal{S}^dV$ pero ella es <u>estricta</u>: si $d = 3$ calculamos

$$\dim_k(T^3V) = \dim_k(V \otimes V \otimes V) = n^3 > \dim_k(A^3V) + \dim_k(\mathcal{S}^3V) = \binom{n}{3} + \binom{n+2}{3}$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

La parte faltante es un sub-ev de T^3V de dimensión $2\frac{n(n^2-1)}{3}$. De hecho, es la suma directa de dos copias de cierto espacio vectorial denotado $S_{(2,1)}(V)$.
En general, existe una descomposición canónica

$$T^dV = V^{\otimes d} = \bigoplus_{\substack{\lambda_1 \geqslant \dots \geqslant \lambda_n \geqslant 0 \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_n = d}} S_{(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}(V)^{\oplus m_\lambda}$$

donde $m_\lambda \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$ y los $S_{(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}$ son los llamados <u>functores de Schur</u>, que verifican (no escribimos los $\lambda_j = 0$):

① $S_{\underbrace{(1, \dots, 1)}_{d \text{ veces}}}(V) \cong \Lambda^d V$

② $S_{(d)}(V) \cong S^dV$

③ $\dim_k S_{(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}(V) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i}\right).$

Aquí, la functorialidad significa que para todo $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ y toda aplicación lineal $f: V \to W$, existe una única aplicación lineal inducida

$$S_\lambda(f) : S_\lambda(V) \to S_\lambda(W)$$

con $S_\lambda(\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$ y $S_\lambda(f \circ g) = S_\lambda(f) \circ S_\lambda(g)$.

La construcción de los functores de Schur está relacionada a la "teoría de representaciones" y a objetos combinatorios llamados "tablas de Young", pero eso es otra historia...