Sea $T \in A^d V \Rightarrow P(T) = \frac{1}{d!} \sum_{\sigma \in S_d} \varepsilon(\sigma) \underbrace{\tilde{\sigma}(T)}_{= \varepsilon(\sigma) T} = \frac{1}{d!} \sum_{\sigma \in S_d} \underbrace{\varepsilon(\sigma)^2}_{=1} T = \frac{d!}{d!} T$. Así, $P^2 = P$ y $P|_{A^d V} = Id_{A^d V}$ (ie, $Im(p) = A^d V$) ⇝ proyector de imagen $A^d V$.

Veamos que $I_d \subseteq \ker(p)$: Sabemos que $I_d$ está generado por los $T = v_1 \otimes \dots \otimes v_d$ con $v_i = v_{i+1}$ para cierto $i \in \{1, \dots, d-1\}$. Sea $\tau = (i, i+1) \in S_d$ transposición, entonces $\tilde{\tau}(T) = T$ y luego $p(T) = p(\tilde{\tau}(T)) = \varepsilon(\tau) p(T) = -p(T) \underset{car(k)=0}{\Longrightarrow} p(T) = 0$ ✓

Luego, la propiedad universal del cociente implica que $\exists! \, \hat{p} : \Lambda^d V = T^d V / I_d \twoheadrightarrow A^d V$.

Si $\pi : T^d V \twoheadrightarrow \Lambda^d V$ es la proyección canónica al cociente, entonces:

$$(\pi \circ \hat{p})(v_1 \wedge \dots \wedge v_d) = (\pi \circ p)(v_1 \otimes \dots \otimes v_d) = \pi \left( \frac{1}{d!} \sum_{\sigma \in S_d} \varepsilon(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(d)} \right)$$

$$= \frac{1}{d!} \sum_{\sigma \in S_d} \varepsilon(\sigma) v_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge v_{\sigma(d)} = \frac{1}{d!} \sum_{\sigma \in S_d} \underbrace{\varepsilon(\sigma)^2}_{=1} v_1 \wedge \dots \wedge v_d$$

$$= v_1 \wedge \dots \wedge v_d .$$

$\Rightarrow \pi \circ \hat{p} = Id_{\Lambda^d V}$ y luego $\hat{p}$ es inyectiva, ie, $I_d = \ker(p)$. ∎

## §47. Pfafiano y matrices antisimétricas

El objetivo de esta sección es aplicar el teorema espectral (ver §43) y las propiedades del álgebra exterior (ver §46) para estudiar matrices <u>anti-simétricas</u>, ie, que cumplen ${}^tA = -A$.

$\boxed{\text{¡Atención!}}$ Durante toda está sección asumiremos $car(k) = 0$ (eg. $k = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). En particular, $\mathbb{Q} \subseteq k$.

<u>Motivación</u>: Toda matriz anti-simétrica $2 \times 2$ se escribe como

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in k .$$

En particular, $\det(A) = \lambda^2$ es el cuadrado de la función $P(A) := \lambda$. En esta sección veremos que toda matriz anti-simétrica real puede escribirse en términos de bloques $2 \times 2$ como el anterior, y que el determinante es el cuadrado de una función: el <u>pffafiano</u>.

<u>Obs</u>: Si $A \in M_m(k)$ anti-simétrica es <u>invertible</u> (ie, $A \in GL_m(k)$) entonces $m = 2n$ es <u>par</u>: ${}^tA = -A \Rightarrow \det(A) = \det({}^tA) = \det(-A) = (-1)^m \det(A) = 0$ si $m$ impar.

<u>Teorema espectral</u> (caso anti-simétrico): Sea $V \cong \mathbb{R}^n$ espacio euclideano y $u : V \to V$ endomorfismo anti-simétrico (ie, $u^* = -u$). Entonces, existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ de $V$ y reales $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R}^{>0}$ positivos tales que

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \left( \begin{array}{cc|c|cc|c} 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ \hline 0 & & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \hline \vdots & & 0 & 0 & \lambda_s & \vdots \\ \vdots & & 0 & -\lambda_s & 0 & \vdots \\ \hline 0 & & 0 & 0 & 0 & 0_{n-r} \end{array} \right) \quad \text{donde } r = rg(u) = 2s$$

y donde $\pm i\lambda_1, \dots, \pm i\lambda_s \in i\mathbb{R}$ son los valores propios no-nulos de $u$.

Dem: Recordemos que si $\mathcal{U} \subseteq V$ es un sub-esv, entonces $u(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U} \Leftrightarrow u^*(\mathcal{U}^\perp) \subseteq \mathcal{U}^\perp$ (ver §43, pág 137). En part, $K = \ker(u)$ estable por $u$ verifica que $K^\perp$ es estable por $u^* = -u$, y luego $K^\perp$ es estable por $u$. Más aún, la restricción de $u$ a $K^\perp$, $u|_{K^\perp}$, es anti-simétrica y de valores propios no-nulos $\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(K^\perp) = rg(u) = r = 2s$ es par. Luego, el Teorema espectral (ver §43) implica en este caso que los valores propios de $u|_{K^\perp}$ son imaginarios puros no-nulos $\pm i\lambda_1, \dots, \pm i\lambda_s$ que vienen en pares conjugados pues $u$ es un endomorfismo real.
Si $K = V$ entonces $u = 0$ y el resultado es claro. Sino, consideramos el valor propio $i\lambda_1$ y notamos que podemos asociarle un plano $\Pi_1 \cong \mathbb{R}^2$ en $V$ que es estable por $u$, en efecto:

Para toda matriz real $A$ de valor propio $i\lambda \in i\mathbb{R}$ no-nulo, consideramos $Z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ vector propio complejo y escribimos $Z = X + iY$, con $X, Y \in \mathbb{R}^n$
$\Rightarrow AZ = i\lambda Z \Leftrightarrow AX + iAY = -\lambda Y + i\lambda X \Leftrightarrow AX = -\lambda Y$ y $AY = \lambda X$.
Así, $\Pi := \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X,Y) \cong \mathbb{R}^2$ es un plano invariante por $A$ y $\langle X, Y\rangle = 0$.

El cálculo anterior implica que si $\mathcal{B}_1 = (a_1, b_1)$ es una base ortonormal de $\Pi_1$ tal que $u(a_1) = -\lambda_1 b_1$ y $u(b_1) = \lambda_1 a_1$, entonces $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u|_{\Pi_1}) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{pmatrix}$. Más aún, intercambiando $i\lambda_1$ con $-i\lambda_1$ si fuera necesario, podemos suponer $\lambda_1 > 0$.
Finalmente, por inducción en $n = \dim_{\mathbb{R}}(V)$ y considerando $V = \Pi_1 \oplus \Pi_1^\perp$, tenemos que necesariamente $K \subseteq \Pi_1^\perp$ y que (por hipótesis de inducción) $\Pi_1^\perp = \Pi_2 \oplus \dots \oplus \Pi_s \oplus K$, con $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_j}(u|_{\Pi_j}) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_j \\ -\lambda_j & 0 \end{pmatrix}$ para $j = 2, \dots, s$. ■

Corolario: Sea $M \in M_n(\mathbb{R})$ matriz anti-simétrica real tal que $r = rg(A) = 2s$ y $\pm i\lambda_1, \dots, \pm i\lambda_s \in i\mathbb{R}$ son los valores propios no-nulos de $A$. Entonces, existe $P \in O(n)$ matriz ortogonal tal que $M = PAP^{-1} = PA\,{}^tP$, donde

$$A = \left(\begin{array}{cc|c|c|c} 0 & \lambda_1 & & & \\ -\lambda_1 & 0 & & & \\ \hline & & \ddots & & \\ \hline & & & \begin{matrix} 0 & \lambda_s \\ -\lambda_s & 0 \end{matrix} & \\ \hline & & & & 0_{n-r} \end{array}\right) \quad \text{con } \lambda_1, \dots, \lambda_s > 0.$$

El resto de la sección nos concentraremos en matrices cuadradas anti-simétricas de tamaño par $2n \times 2n$.

Def: Sea $A = (a_{ij}) \in M_{2n}(k)$ matriz anti-simétrica, y sea $(e_1, \dots, e_{2n})$ la base canónica de $V = k^{2n}$. Definimos entonces

$$\omega(A) := \sum_{1 \le i < j \le 2n} a_{ij}\, e_i \wedge e_j \quad \text{en } \Lambda^2 V.$$

Si para todo $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ denotamos $\omega(A)^k := \omega(A)^{\wedge k} = \overbrace{\omega(A) \wedge \dots \wedge \omega(A)}^{k \text{ veces}} \in \Lambda^{2k} V$.
Entonces, definimos el pfaffiano de $A$ como el único escalar $Pf(A) \in k$ tal que:

$$\omega(A)^n = n!\, Pf(A)\, e_1 \wedge \dots \wedge e_{2n} \Leftrightarrow \frac{1}{n!}\omega(A)^n = Pf(A)\, e_1 \wedge \dots \wedge e_{2n} \text{ en } \Lambda^{2n} V \cong k.$$

Ejemplo: ① La matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix}$ cumple $\omega(A) = a_{12}\, e_1 \wedge e_2$. Aquí $2 = 2n \Rightarrow n = 1$ y luego $Pf(A) = \frac{a_{12}}{1!} = a_{12}$.

② $(n=2)$ La matriz anti-simétrica $4\times 4$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix}$$

cumple $\omega(A) \underset{df}{=} a_{12}\, e_1\wedge e_2 + a_{13}\, e_1 \wedge e_3 + a_{14}\, e_1 \wedge e_4 + a_{23}\, e_2 \wedge e_3 + a_{24}\, e_2 \wedge e_4 + a_{34}\, e_3 \wedge e_4$.

Luego, el pfaffiano de A se calcula mediante $\omega(A) \wedge \omega(A) = 2!\, Pf(A)\, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$:

$$\begin{aligned}\omega(A)\wedge\omega(A) = {} & (a_{12}\, e_1\wedge e_2) \wedge (a_{34}\, e_3 \wedge e_4) + (a_{13}\, e_1 \wedge e_3) \wedge (a_{24}\, e_2\wedge e_4) + \\ & (a_{14}\, e_1 \wedge e_4) \wedge (a_{23}\, e_2 \wedge e_3) + (a_{23}\, e_2 \wedge e_3) \wedge (a_{14}\, e_1 \wedge e_4) + \\ & (a_{24}\, e_2 \wedge e_4) \wedge (a_{13}\, e_1 \wedge e_3) + (a_{34}\, e_3 \wedge e_4) \wedge (a_{12}\, e_1 \wedge e_2)\end{aligned}$$

puesto que $e_i \wedge e_j \wedge e_k \wedge e_l = 0$ si dos índices se repiten. Mas aún, sabemos que $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$, por lo que finalmente obtenemos

$\omega(A)\wedge\omega(A) = 2(a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})\, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$ y luego obtenemos que $Pf(A) = a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}$ es el pfaffiano de A en este caso.

**Ejercicio** Calcular $Pf(A)$ para una matriz anti-simétrica $6\times 6$.

Ejemplo importante: Consideremos la matriz anti-simétrica

$$A = \left(\begin{array}{cc|c|cc} 0 & \lambda_1 & 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \ddots & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & 0 & \lambda_n \\ & & & -\lambda_n & 0 \end{array}\right) \in M_{2n}(k)$$

Entonces, $\omega(A) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, e_{2j-1} \wedge e_{2j} = \lambda_1\, e_1 \wedge e_2 + \lambda_2\, e_3 \wedge e_4 + \dots + \lambda_n\, e_{2n-1} \wedge e_{2n}$

Probemos por inducción en $n$ que $Pf(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$, ie, que

$$\omega(A)^n = n!\, \lambda_1 \cdots \lambda_n\, e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_{2n-1} \wedge e_{2n}.$$

Sea $\eta = \lambda_1\, e_1\wedge e_2 + \dots + \lambda_{n-1}\, e_{2n-3} \wedge e_{2n-2} \underset{\text{Hip.}}{\Rightarrow} \eta^{n-1} = (n-1)!\, \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}\, e_1 \wedge \dots \wedge e_{2n-2}$.

y además $\eta^n = \eta^{n-1} \wedge \eta = 0$.

Recuerdo (ver §46, pág 150): si $\alpha \in \Lambda^d V$ y $\beta \in \Lambda^e V \Rightarrow \beta\wedge\alpha = (-1)^{de}\, \alpha \wedge \beta$.
En part, si $\alpha := \lambda_n\, e_{2n-1} \wedge e_{2n} \in \Lambda^2 V$ entonces $\beta \wedge \alpha = \alpha \wedge \beta$ para todo $\beta$ !
$\Rightarrow$ La fórmula del binomio de Newton vale en este caso particular. Más aún, si $\alpha = \lambda_n\, e_{2n-1} \wedge e_{2n}$ entonces $\alpha^k = 0$ si $k \geq 2$.

Escribamos $\omega = \eta + \alpha \Rightarrow \omega^n = (\eta+\alpha)^n = \underbrace{\eta^n}_{=0} + n\, \eta^{n-1} \wedge \alpha + \underbrace{\binom{n}{2} \eta^{n-2} \wedge \alpha^2 + \dots}_{=0 \text{ para } \alpha^k \text{ con } k \geq 2}$

$\Rightarrow \omega^n = n\, \eta^{n-1} \wedge \alpha = \underbrace{n \cdot (n-1)!}_{=n!}\, \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}\, e_1 \wedge \dots \wedge e_{2n-2} \wedge (\lambda_n\, e_{2n-1} \wedge e_{2n})$

$= n!\, \lambda_1 \cdots \lambda_n\, e_1 \wedge \dots \wedge e_{2n}$, y luego $Pf(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.

⚠ Notar además que $\det(A) = \lambda_1^2 \cdots \lambda_n^2 = Pf(A)^2$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}^*$ Sea $A = (a_{ij}) \in M_{2n}(k)$ matriz anti-simétrica. Probar (eg. por inducción) la fórmula general

$$Pf(A) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in S_{2n}} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),\sigma(2)} \cdots a_{\sigma(2n-1),\sigma(2n)} = \sum_{\sigma \in F_{2n}} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),\sigma(2)} \cdots a_{\sigma(2n-1),\sigma(2n)}$$

donde $F_{2n} := \{\sigma \in S_{2n}$ tal que $\sigma(1) < \sigma(3) < \ldots < \sigma(2n-1)$ y $\sigma(1) < \sigma(2), \sigma(3) < \sigma(4), \ldots, \sigma(2n-1) < \sigma(2n)$

Recuerdo: Si $u : V \to V$ es un endomorfismo, entonces (por functorialidad) existe $\Lambda^2 u : \Lambda^2 V \to \Lambda^2 V$ tal que $(\Lambda^2 u)(e_i \wedge e_j) = u(e_i) \wedge u(e_j)$. Matricialmente, si $P$ es una matriz entonces denotamos de igual modo $(\Lambda^2 P)(e_i \wedge e_j) = P(e_i) \wedge P(e_j)$.

Lema: Sea $A \in M_{2n}(k)$ matriz anti-simétrica y sea $P \in M_{2n}(k)$ una matriz. Entonces,

$$\omega(PA{}^tP) = (\Lambda^2 P)(\omega(A)) \quad \text{en } \Lambda^2 k^{2n}.$$

Dem: Si $P = (p_{ij})$ y $A = (a_{k\ell})$ entonces $PA{}^tP = (c_{ij})$ con $c_{ij} = \sum_{k,\ell} p_{ik} a_{k\ell} p_{j\ell}$

$$\Rightarrow \omega(PA{}^tP) = \sum_{i<j} c_{ij}\, e_i \wedge e_j = \sum_{i<j} \sum_{k,\ell} p_{ik} a_{k\ell} p_{j\ell}\, e_i \wedge e_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,\ell} p_{ik} a_{k\ell} p_{j\ell}\, e_i \wedge e_j$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,\ell} a_{k\ell} (p_{ik} e_i) \wedge (p_{j\ell} e_j) = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell} a_{k\ell} P(e_k) \wedge P(e_\ell)$$

$$= \sum_{k<\ell} a_{k\ell} \underbrace{P(e_k) \wedge P(e_\ell)}_{(\Lambda^2 P)(e_k \wedge e_\ell)} = (\Lambda^2 P)(\omega(A)). \quad \blacksquare$$

El Lema anterior permite probar la siguiente identidad útil.

Prop: Sea $A \in M_{2n}(k)$ matriz anti-simétrica y sea $P \in M_{2n}(k)$ una matriz. Entonces,

$$Pf(PA{}^tP) = \det(P)\, Pf(A).$$

Dem: La identidad $\omega(PA{}^tP) = (\Lambda^2 P)(\omega(A))$ implica que

$$n!\, Pf(PA{}^tP)\, e_1 \wedge \ldots \wedge e_{2n} \underset{\text{def}}{=} \omega(PA{}^tP)^n = ((\Lambda^2 P)(\omega(A)))^n.$$

Por otro lado, si $V = k^{2n}$, entonces en $\Lambda V = k \oplus V \oplus \Lambda^2 V \oplus \ldots \oplus \Lambda^{2n} V$ se tiene $\Lambda P = 1 \oplus P \oplus \Lambda^2 P \oplus \ldots \oplus \Lambda^{2n} P$. Así, dado que $\omega(A) \in \Lambda^2 V$ (homogéneo de grado 2) tenemos $(\Lambda^2 P)(\omega(A)) = (\Lambda P)(\omega(A))$. Sin embargo, $\Lambda P$ es un morfismo de $k$-álgebras (i.e. respeta el producto !) $\Rightarrow (\Lambda P)(\underbrace{\omega(A)^n}_{\in \Lambda^{2n} V}) = (\Lambda^{2n} P)(\omega(A)^n)$.

Finalmente, dado que $\Lambda^{2n} P$ es la homotecia de factor $\det(P)$ en $\Lambda^{2n} V \cong k$, obtenemos que:

$$((\Lambda^2 P)(\omega(A)))^n = (\Lambda^{2n} P)(\omega(A)^n) = (\det P) \cdot \omega(A)^n = n!\, \det(P)\, Pf(A)\, e_1 \wedge \ldots \wedge e_{2n} \;\checkmark \blacksquare$$

Teorema (Cayley, 1847): Sea $A \in M_{2n}(k)$ matriz anti-simétrica. Entonces,

$$\det(A) = Pf(A)^2.$$

Dem: Basta probarlo para $k = \mathbb{Q}$ y, en part, $k \subseteq \mathbb{R}$. El teorema espectral (pág 153) implica que $A = P \tilde{A}\, {}^tP$ con $P \in O(n)$ y $\tilde{A}$ de la forma del "Ejemplo Importante" (pág 155). Finalmente, $Pf(\tilde{A})^2 = \det(\tilde{A}) = \det(A)$ y $Pf(A) = \det(P)\, Pf(\tilde{A}) = \pm Pf(\tilde{A})$ $\checkmark$ $\blacksquare$