$f_{i'} = f(e_{i'}) = f(P^j_{i'} e_j) = P^j_{i'} f_j$, ie, las coordenadas de $f \in V^*$ se transforman en el mismo sentido que las bases (de aquí el término "covariante").

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Para un tensor de tipo (p,q) de coordenadas $(T^{i_1 \cdots i_q}_{j_1 \cdots j_p})$, probar que las coordenadas en la base $(e_{1'}, \ldots, e_{n'})$ son

$$(T')^{i_1' \cdots i_q'}_{j_1' \cdots j_p'} = (P^{-1})^{i_1'}_{i_1} \cdots (P^{-1})^{i_q'}_{i_q} \, P^{j_1}_{j_1'} \cdots P^{j_p}_{j_p'} \, T^{i_1 \cdots i_q}_{j_1 \cdots j_p} .$$

__Obs__: Generalmente, los cálculos anteriores se hacen en presencia de una "métrica", ie, una forma bilineal $B : V \times V \to k$ no-degenerada (eg, producto escalar o forma de Lorentz) y decimos que B es el tensor métrico:

Dado que $\mathrm{Bil}(V \times V, k) \cong (V \otimes V)^* \cong V^* \otimes V^*$, pensamos B como un tensor de tipo $(2,0)$ (o 2-covariante) y denotamos su matriz por $g_{ij} = B(e_i, e_j)$ en la base $(e_1, \ldots, e_n)$ de V.

Como B es no-degenerada, $\widehat{B} : V \xrightarrow{\sim} V^*$, $x \mapsto B(x, \cdot)$ es un isomorfismo que identifica vectores (contravariantes) y formas lineales (covariantes). En coordenadas:

$\widehat{B}(e_j)(e_i) = B(e_j, e_i) = g_{ji} \Rightarrow \widehat{B}(v^j e_j) = v^j g_{ji} e^i$

Así, pasamos de coord. ~~covariantes~~ contravariantes (v^j) a coord. covariantes (v_i) mediante la fórmula $v_i = v^j g_{ji}$.

Finalmente, observamos que el isomorfismo $\widehat{B}$ permite transportar la métrica B a una métrica B^* en V^*. Explícitamente, la matriz $g^{ij} := B^*(e^i, e^j)$ de B^* resp. a la base dual $(e^1, \ldots, e^n)$ de V^* es la inversa de la matriz (g_{ij}), ie, $g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$. Este "tensor métrico dual" permite pasar de coordenadas covariantes a contravariantes mediante la fórmula $v^j = v_i g^{ij}$, y en particular:

$$B(u, v) = u^i v_i = u_i v^i = g_{ij} u^i v^j = g^{ij} u_i v_j .$$

§46. Álgebra exterior y formas multilineales alternadas

Por un lado, en la construcción del álgebra tensorial $TV = \bigoplus_{d \geq 0} T^d V$ tenemos que $(T^d V)^* \cong \mathrm{Mult}^d(V \overset{d \text{ veces}}{\times \cdots \times} V, k)$ son canonicamente isomorfos. Por otro lado, estudiamos en §9 las formas multilineales alternadas: una forma d-lineal $\omega : V \overset{d \text{ veces}}{\times \cdots \times} V \to k$ es alternada si $\omega(v_1, \ldots, v_d) = 0$ cuando dos de los $v_1, \ldots, v_d$ son iguales. Más aún, si denotamos por

$$\mathrm{Alt}^d(V) = \{ \omega : V \overset{d \text{ veces}}{\times \cdots \times} V \to k \ \ d\text{-lineal alternada} \}$$

al k-ev de formas d-lineales alternadas, entonces vimos en §10 que si $n = \dim_k(V)$ entonces toda forma n-lineal alternada es proporcional al determinante, ie, $\mathrm{Alt}^n(V) = \mathrm{Vect}_k(\det)$.

El objetivo de esta sección es realizar una construcción análoga a ~~...~~ $\mathrm{Alt}^d(V)$ en TV (que será dual a $\mathrm{Alt}^d(V)$ en un sentido preciso).

<u>Concretamente</u>: Nos gustaría construir a partir de TV una nueva álgebra ΛV tal que para cada tensor $v_1 \otimes \ldots \otimes v_d$ en TV asociamos un "símbolo" $v_1 \wedge \ldots \wedge v_d$ (ie, vector en ΛV) tal que $v_1 \wedge \ldots \wedge v_d = 0$ si dos de los $v_1, \ldots, v_d$ son iguales.

Como siempre, los cocientes son útiles para construir objetos a partir de otros: basta cocientar por las "relaciones" que deseamos que se verifiquen!

<u>Def</u>: Sea V un k-ev y TV su álgebra tensorial. Sea $I \subseteq TV$ el sub-ev generado por todos los tensores de la forma

$$a \otimes v \otimes v \otimes b \quad \text{con } v \in V \text{ y } a, b \in TV.$$

Definimos el <u>álgebra exterior</u> de V como $\Lambda V := TV/I$, y denotamos por $v_1 \wedge \ldots \wedge v_d$ la imagen de $v_1 \otimes \ldots \otimes v_d$ en el cociente. Más aún, la composición $V \hookrightarrow TV \twoheadrightarrow \Lambda V$ será denotada $i : V \to \Lambda V$.

<u>Hecho</u> (MAT214): Se puede probar que I es un <u>ideal</u> del álgebra TV (cf. §18, pág 37). Esto último implica exactamente que el cociente $\Lambda V = TV/I$ también es una k-álgebra, ie, la multiplicación (no conmutativa) en TV define una multiplicación en el álgebra exterior ΛV que llamamos <u>producto exterior</u>:

$$(v_1 \wedge \ldots \wedge v_d, w_1 \wedge \ldots \wedge w_e) \longmapsto v_1 \wedge \ldots \wedge v_d \wedge w_1 \wedge \ldots \wedge w_e.$$

<u>Teorema</u> (propiedad universal): El álgebra exterior ΛV satisface la propiedad universal siguiente:

"Para toda aplicación lineal $f : V \to A$ a una k-álgebra con unidad A tal que $f(v)^2 = 0$ para todo $v \in V$, existe un <u>único</u> morfismo de álgebras $\hat{f} : \Lambda V \to A$ tal que $f = \hat{f} \circ i$, con $i : V \to \Lambda V$."

En otras palabras, el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & A \\ \Lambda V \arrow[ur, "\exists! \hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

<u>Dem</u>: Por la propiedad universal de TV, $\exists!\, g : TV \to A$ inducido por f. Dado que $g(v \otimes v) = f(v) f(v) = f(v)^2 = 0$, la aplicación lineal g se anula en el ideal I. Luego, la propiedad universal del cociente implica que $\exists!\, \hat{f} : \Lambda V = TV/I \to A$ que además es un morfismo de álgebras en este caso (pues g lo es). En otras palabras, la demostración puede resumirse en el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d] \arrow[dd, bend right, "i"'] & A \\ TV \arrow[ur, dashed, "\exists! g"] \arrow[d] & \\ \Lambda V \arrow[uur, dashed, bend right, "\exists! \hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

■

Describamos ahora la "functorialidad" asociada a la propiedad universal anterior, cuya demostración se deja como ejercicio:

Prop (functorialidad): Si $f : V \to W$ es una aplicación lineal entre k-ev. Entonces, existe un único morfismo de álgebras $\Lambda f : \Lambda V \to \Lambda W$ tq $i_W \circ f = \Lambda f \circ i_V$, ie, el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_V"'] & W \arrow[d, "i_W"] \\ \Lambda V \arrow[r, "\Lambda f"'] & \Lambda W \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Más aún, $\Lambda(f \circ g) = \Lambda f \circ \Lambda g$.

Veamos ahora cómo describir el álgebra exterior ΛV concretamente:

Recordemos que $I \subseteq TV$ es el sub-ev generado por tensores de la forma

$$a \otimes v \otimes v \otimes b \quad \text{con } v \in V \text{ y } a, b \in TV.$$

Para $d \in \mathbb{N}$, definimos $I_d := I \cap T^d V$ como el sub-ev de I generado por elementos homogéneos de grado d. Luego, $I = \bigoplus_{d \geq 0} I_d$ y en particular podemos considerar para cada $d \in \mathbb{N}$ el cociente

$$\Lambda^d V := T^d V / I_d$$

llamado la <u>d-ésima potencia exterior de V</u>. Así, el álgebra exterior también es una k-álgebra graduada:

$$\Lambda V = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} T^d V / I_d = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} \Lambda^d V.$$

<u>Importante</u>: Dado que los vectores no-nulos de I contienen los elementos de grado 2 de la forma $v \otimes v$, tenemos que $T^0 V \cap I = \{0\}$ y $T^1 V \cap I = \{0\}$ $\Rightarrow \Lambda^0 V \cong k$ y $\Lambda^1 V \cong T^1 V \cong V$. En part, $i : V \hookrightarrow \Lambda V$ es <u>inyectivo</u>.

Así: $\Lambda V = \underset{\lambda}{\underset{\mathbin{\rotatebox{90}{$\in$}}}{k}} \oplus \underset{v}{\underset{\mathbin{\rotatebox{90}{$\in$}}}{V}} \oplus \underset{v_1 \wedge v_2}{\underset{\mathbin{\rotatebox{90}{$\in$}}}{\Lambda^2 V}} \oplus \underset{v_1 \wedge v_2 \wedge v_3}{\underset{\mathbin{\rotatebox{90}{$\in$}}}{\Lambda^3 V}} \oplus \dots$

Luego, el k-ev ΛV está generado por los vectores de la forma $v_1 \wedge \dots \wedge v_d$ con $d \in \mathbb{N}$ y donde $v_1 \wedge \dots \wedge v_d = 0$ si dos de los $v_1, \dots, v_d \in V$ son iguales. Además, el hecho que ΛV sea una álgebra graduada se escribe como

$$(\Lambda^d V) \wedge (\Lambda^e V) \subseteq \Lambda^{d+e} V.$$

Más aún, si $f : V \to W$ es una aplicación lineal, entonces $\Lambda f = \bigoplus_{d \geq 0} \Lambda^d f$, donde $\Lambda^d f : \Lambda^d V \to \Lambda^d W$ está dada por $(\Lambda^d f)(v_1 \wedge \dots \wedge v_d) = f(v_1) \wedge \dots \wedge f(v_d)$.

Prop: Sea V un k-ev. Entonces, para todo $d \geq 2$ la aplicación d-lineal

$$V^d = \overset{d \text{ veces}}{V \times \dots \times V} \longrightarrow \Lambda^d V$$
$$(v_1, \dots, v_d) \longmapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_d$$

es <u>alternada</u>. En particular, para toda permutación $\sigma \in S_d$ y $v_1, \dots, v_d \in V$ se tiene:

$$v_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge v_{\sigma(d)} = \varepsilon(\sigma)\, v_1 \wedge \dots \wedge v_d.$$

<u>Dem</u>: Por definición de I y de ΛV, la expresión $v_1 \wedge \dots \wedge v_d$ es nula si dos vectores consecutivos son iguales, el caso general se deduce al expresar una permutación arbitraria como producto de trasposiciones (cf. §9, pág 18). ■

Corolario: El álgebra graduada ΛV es anti-conmutativa: si $\alpha \in \Lambda^d V$ y $\beta \in \Lambda^e V$ entonces se tiene que $\beta \wedge \alpha = (-1)^{de}\, \alpha \wedge \beta$.

Dem: Basta probarlo en el caso que $\alpha = v_1 \wedge \ldots \wedge v_d$ y $\beta = w_1 \wedge \ldots \wedge w_e$ (el caso general es una combinación lineal de elementos de esta forma). En tal caso, el resultado se obtiene usando repetidamente la identidad $w \wedge v = - v \wedge w$. ∎

El siguiente resultado resume las principales propiedades de las potencias exteriores $\Lambda^d V$:

Teorema: Sea V un k-ev y sea $d \in \mathbb{N}$. Entonces:

① Para todo $d \geq 1$, la aplicación d-lineal alternada $V^d \to \Lambda^d V$, $(v_1, \ldots, v_d) \mapsto v_1 \wedge \ldots \wedge v_d$ satisface la propiedad universal siguiente:

"Para todo k-ev $\mathcal{U}$ y toda aplicación d-lineal alternada $\omega: V^d \to \mathcal{U}$, existe una única aplicación lineal $\hat{\omega}: \Lambda^d V \to \mathcal{U}$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} V^d \arrow[r, "\omega"] \arrow[d] & \mathcal{U} \\ \Lambda^d V \arrow[ur, "\exists!\, \hat{\omega}"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo."

En particular, $\mathrm{Alt}^d(V) \cong (\Lambda^d V)^*$.

② Si V es de dimensión finita n y $(e_1, \ldots, e_n)$ es una base de V, entonces $(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_d})_{1 \leq i_1 < \ldots < i_d \leq n}$ es una base de $\Lambda^d V$ para todo $d \geq 1$. En particular, tenemos $\Lambda^d V = 0$ para $d > n$ y $\dim_k(\Lambda^d V) = \binom{n}{d}$.

③ Si V es de dimensión finita n y $0 \leq d \leq n$, la forma bilineal

$$\begin{aligned} \Lambda^d V \times \Lambda^{n-d} V &\longrightarrow \Lambda^n V \cong k \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

es no-degenerada. En part, induce un isomorfismo canónico $\Lambda^n V \otimes (\Lambda^d V)^* \cong \Lambda^{n-d} V$ y un isomorfismo no-canónico (ie, depende de la elección de un isomorfismo $\Lambda^n V \cong k$) $(\Lambda^d V)^* \cong \Lambda^{n-d} V$.

④ La aplicación $\Lambda^d(V^*) \times \Lambda^d V \to k$, $(f_1 \wedge \ldots \wedge f_d, v_1 \wedge \ldots \wedge v_d) \mapsto \det\left((f_i(v_j))_{1 \leq i,j \leq d}\right)$ es bilineal y no-degenerada. En part, si V es de dimensión finita entonces hay un isomorfismo canónico $\Lambda^d V^* \cong (\Lambda^d V)^*$.

⑤ Si V es de dimensión finita n y $u: V \to V$ es un endomorfismo, entonces el endomorfismo $\Lambda^n u$ de $\Lambda^n V \cong k$ está dado por la multiplicación por $\det(u)$. Explícitamente, $(\Lambda^n u)(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) = \det(u)\, e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$.

Dem: ① La propiedad universal de TV implica que la aplicación d-lineal (alternada) $\omega: V^d \to \mathcal{U}$ induce una única $g: T^d V \to \mathcal{U}$ lineal tq $\omega = g \circ i$, con $i: V^d \to T^d V$. Pero, dado que ω es alternada, g se anula en $I_d = I \cap T^d V$ y luego la propiedad universal del cociente $\Rightarrow \exists!\, \hat{\omega}: \Lambda^d V = T^d V / I_d \to \mathcal{U}$ ✓ En part, si $\mathcal{U} = k$ obtenemos $\mathrm{Alt}^d(V) \cong (\Lambda^d V)^*$.

② y ③: Dado que $v_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge v_{\sigma(d)} = \varepsilon(\sigma)\, v_1 \wedge \ldots \wedge v_d$, tenemos que los vectores $(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_d})_{1 \leq i_1 < \ldots < i_d \leq n}$ generan $\Lambda^d V$ (podemos suponer los índices ordenados).

Veamos que son l.i: si $d = n$ entonces sabemos (ver §10) que $\mathrm{Alt}^n(V) = \mathrm{Vect}_k(\det_{\mathcal{B}})$ es de dimensión 1, y luego $\Lambda^n V \cong (\mathrm{Alt}^n(V))^* \cong k$ es de dimensión 1, por lo que el vector no-nulo $e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$ es una base de $\Lambda^n V$. Supongamos $d < n$ y fijemos índices $1 \le j_1 < \dots < j_{n-d} \le n$, entonces el único caso en que

$$(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d}) \wedge (e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{n-d}}) \neq 0 \quad \text{en } \Lambda^n V \cong k$$

es cuando $\{j_1, \dots, j_{n-d}\}$ es el complemento del conjunto $\{i_1, \dots, i_d\}$ en $\{1, \dots, n\}$, pues no pueden repetirse índices. Así, concluimos que los $(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d})_{1 \le i_1 < \dots < i_d \le n}$ son l.i. (basta tomar producto exterior de cualquier combinación lineal con $e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{n-d}}$) y luego una base de $\Lambda^d V$. Más aún, esto también prueba que $\Lambda^d V \times \Lambda^{n-d} V \to \Lambda^n V$, $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$ es bilineal no-degenerada ✓

En part, "fijar la segunda variable" induce un isomorfismo canónico entre $\Lambda^{n-d} V$ y $\mathrm{Hom}_k(\Lambda^d V, \Lambda^n V) \cong (\Lambda^d V)^* \otimes \Lambda^n V$ (ver §44, pág 142) ✓

④ Las propiedades del determinante vistas en §10 implican que la aplicación $\overbrace{V^* \times \dots \times V^*}^{d \text{ veces}} \times \overbrace{V \times \dots \times V}^{d \text{ veces}} \to k$, $((f_1, \dots, f_d), (v_1, \dots, v_d)) \longmapsto \det((f_i(v_j))_{1 \le i, j \le d})$ es alternada en los f_j y es alternada en los v_i, por lo que induce una aplicación bilineal $B : \Lambda^d V^* \times \Lambda^d V \to k$.

Si $(e_1, \dots, e_n)$ es una base de V y $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ es la base dual de V^*, y si $1 \le i_1 < \dots < i_d \le n$ y $1 \le j_1 < \dots < j_d \le n$ entonces (Ejercicio):

$$B(e^*_{i_1} \wedge \dots \wedge e^*_{i_d}, e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_d}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i_k = j_k \text{ para todo } k \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$$

Así, la forma B es no-degenerada e induce una dualidad en la cual $(e^*_{i_1} \wedge \dots \wedge e^*_{i_d})_{1 \le i_1 < \dots < i_d \le n}$ es la base dual de $(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d})_{1 \le i_1 < \dots < i_d \le n}$ ✓

⑤ Sea $A = (a_{ij}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ resp. a una base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de V. Entonces:

$$(\Lambda^n u)(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) \underset{\text{def}}{=} u(e_1) \wedge \dots \wedge u(e_n) = \left(\sum_i a_{i1} e_i\right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_i a_{in} e_i\right)$$

$$= \left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} e_{i_1}\right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n} e_{i_n}\right) = \sum_{i_1, \dots, i_n = 1}^{n} a_{i_1 1} \cdots a_{i_n n}\, e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1) 1} \cdots a_{\sigma(n) n} \underbrace{(e_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge e_{\sigma(n)})}_{\varepsilon(\sigma)\, e_1 \wedge \dots \wedge e_n} = \det(u)\, e_1 \wedge \dots \wedge e_n \ ✓$$

∎

El siguiente resultado es una aplicación, muy útil en la práctica, del Teorema anterior:

Corolario: Sea V un k-ev de dimensión finita. Entonces, los vectores $v_1, \dots, v_d \in V$ son l.i. $\iff$ $v_1 \wedge \dots \wedge v_d \neq 0$ en $\Lambda^d V$. En part, si los vectores $v_1, \dots, v_d \in V$ son li y $v \in V$ es otro vector, entonces $v \in \mathrm{Vect}_k(v_1, \dots, v_d) \iff v_1 \wedge \dots \wedge v_d \wedge v = 0$ en $\Lambda^{d+1} V$.

Dem: Si los $v_1, \dots, v_d$ son li, entonces se pueden completar en una base de V y luego $v_1 \wedge \dots \wedge v_d$ es parte de una base de $\Lambda^d V$, en part. es no-nulo. Recíprocamente, si $v_1, \dots, v_d$ son l.d y, por ejemplo, $v_d = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{d-1} v_{d-1}$ $\Rightarrow v_1 \wedge \dots \wedge v_{d-1} \wedge v_d = v_1 \wedge \dots \wedge v_{d-1} \wedge (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{d-1} v_{d-1}) = 0$ ✓ Finalmente, si los $v_1, \dots, v_d$ son li y $v \in V$ entonces $v \in \mathrm{Vect}_k(v_1, \dots, v_d) \iff \{v_1, \dots, v_d, v\}$ es l.d. ∎

Ejemplo: En $\mathbb{R}^4$ con base canónica e_1, e_2, e_3, e_4 los vectores $v_1 = (1,0,1,0)$ y $v_2 = (0,1,0,1)$ son li pues: $v_1 \wedge v_2 = (e_1+e_3)\wedge(e_2+e_4) = e_1\wedge e_2 + e_1\wedge e_4 + e_3\wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$
$$= e_1\wedge e_2 + e_1\wedge e_4 - e_2\wedge e_3 + e_3\wedge e_4 \neq 0 \text{ en } \Lambda^2\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^{\binom{4}{2}} = \mathbb{R}^6$$
Por otro lado, un vector $v\in\mathbb{R}^4$ pertenece al plano $\Pi = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2) \simeq \mathbb{R}^2$ si y sólo si $v_1\wedge v_2 \wedge v = 0$.

Ejemplo (producto cruz): Recordemos que si $V \cong \mathbb{R}^3$ es un espacio euclideano orientado, entonces el producto cruz $u\times v \in V$ de $u, v\in V$ está definido por la relación
$$\det_{\mathcal{B}}(u,v,w) = \langle u\times v, w\rangle \quad \forall w\in V,$$
donde $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ es cualquier base ortonormal directa de V (ver §38).
Por otro lado, el producto exterior $e_1\wedge e_2\wedge e_3 \in \Lambda^3 V$ provee un generador canónico (gracias a la orientación!) de $\Lambda^3 V \cong \mathbb{R}$. Así, en este caso el isomorfismo $\Lambda^{n-d}V \cong (\Lambda^d V)^* \otimes \Lambda^n V$ se reduce (donde $n=3$ y $d=1$) a $\Lambda^2 V \cong V^*$. Más aún, si consideramos el isomorfismo $V^*\cong V$ dado por el producto escalar, obtenemos un isomorfismo $\Lambda^2 V \cong V$ y por ende $u\wedge v \in \Lambda^2 V$ corresponde a un único vector en V. $\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que dicho vector es $u\times v \in V$.

Caso particular importante: Supongamos que $\mathrm{car}(k) = 0$ (eg. $k = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). En este caso, podemos pensar a $\Lambda^d V$ como un sub-espacio vectorial de $T^d V$ de la manera siguiente:
Para cada $\sigma\in S_d$ permutación, entonces definimos el endomorfismo $\tilde\sigma$ de T^dV mediante la fórmula
$$\tilde\sigma(v_1\otimes\cdots\otimes v_d) = v_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(d)}.$$

Def: Un tensor $T\in T^dV$ se dice anti-simétrico si $\tilde\sigma(T) = \varepsilon(\sigma)T$ para todo $\sigma\in S_d$. Denotamos por $A^d V \subseteq T^d V$ al sub-ev de tensores anti-simétricos. Más aún, definimos la aplicación de anti-simetrización mediante:
$$p: T^dV \longrightarrow T^dV$$
$$T \longmapsto \frac{1}{d!}\sum_{\sigma\in S_d}\varepsilon(\sigma)\tilde\sigma(T)$$

Ejemplo ($d=2$): $p(v_1\otimes v_2) = \frac{1}{2}(v_1\otimes v_2 - v_2\otimes v_1)$.

Prop: La ~~apl~~ aplicación lineal p es un proyector (ie, $p^2=p$), de kernel $I_d = I\cap T^dV$ y de imagen A^dV. En part, $A^dV \cong \Lambda^d V$.

Dem: Para todo $\tau\in S_d$ se tiene:
$$p(\tilde\tau(T)) = \frac{1}{d!}\sum_{\sigma\in S_d}\varepsilon(\sigma)\tilde\sigma\tilde\tau(T) \underset{\sigma'=\sigma\tau}{=} \frac{1}{d!}\sum_{\sigma'\in S_d}\varepsilon(\sigma'\tau^{-1})\tilde\sigma'(T) = \varepsilon(\tau^{-1})p(T) = \varepsilon(\tau)p(T).$$
Del mismo modo:
$$\tilde\tau(p(T)) = \frac{1}{d!}\sum_{\sigma\in S_d}\varepsilon(\sigma)\tilde\tau\tilde\sigma(T) = \frac{1}{d!}\sum_{\sigma'\in S_d}\varepsilon(\tau^{-1}\sigma')\tilde\sigma'(T) = \varepsilon(\tau)p(T), \text{ ie, } p(T)\in A^dV.$$
Además: $$p^2(T) = p(p(T)) = \frac{1}{d!}\sum_{\tau\in S_d}\varepsilon(\tau)\underbrace{\tilde\tau(p(T))}_{=\varepsilon(\tau)p(T)} = \frac{1}{d!}\sum_{\tau\in S_d}\underbrace{\varepsilon(\tau)^2}_{=1}p(T) = \frac{\cancel{d!}}{\cancel{d!}}p(T)$$
$\Rightarrow p^2 = p$ y $\mathrm{Im}(p)\subseteq A^dV$. Veamos que $\mathrm{Im}(p) = A^dV$:

Sea $T \in A^d V \Rightarrow \mathcal{P}(T) = \frac{1}{d!}\sum_{\sigma \in S_d} \varepsilon(\sigma) \underbrace{\widetilde{\sigma}(T)}_{=\varepsilon(\sigma)T} = \frac{1}{d!}\sum_{\sigma\in S_d} \underbrace{\varepsilon(\sigma)^2}_{=1} T = \frac{\cancel{d!}}{\cancel{d!}} T$. Así, $P^2 = P$ y

$P|_{A^dV} = Id_{A^dV}$ (ie, $Im(p) = A^d V$) es proyector de imagen $A^d V$.

Veamos que $I_d \subseteq \ker(p)$: Sabemos que I_d está generado por los $T = v_1 \otimes \ldots \otimes v_d$ con $v_i = v_{i+1}$ para cierto $i \in \{1, \ldots, d-1\}$. Sea $\tau = (i, i+1) \in S_d$ transposición, entonces $\widetilde{\tau}(T) = T$ y luego $p(T) = p(\widetilde{\tau}(T)) = \varepsilon(\tau) p(T) = -p(T) \underset{car(k)=0}{\Longrightarrow} p(T) = 0$ ✓

Luego, la propiedad universal del cociente implica que $\exists! \, \widehat{p} : \Lambda^d V = T^d V / I_d \twoheadrightarrow A^d V$.

Si $\pi : T^d V \twoheadrightarrow \Lambda^d V$ es la proyección canónica al cociente, entonces:

$$(\pi \circ \widehat{p})(v_1 \wedge \ldots \wedge v_d) = (\pi \circ p)(v_1 \otimes \ldots \otimes v_d) = \pi\left(\frac{1}{d!}\sum_{\sigma \in S_d} \varepsilon(\sigma)\, v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(d)}\right)$$
$$= \frac{1}{d!}\sum_{\sigma\in S_d} \varepsilon(\sigma)\, v_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge v_{\sigma(d)} = \frac{1}{d!}\sum_{\sigma \in S_d} \underbrace{\varepsilon(\sigma)^2}_{=1} v_1 \wedge \ldots \wedge v_d$$
$$= v_1 \wedge \ldots \wedge v_d .$$

$\Rightarrow \pi \circ \widehat{p} = Id_{\Lambda^d V}$ y luego $\widehat{p}$ es inyectiva, ie, $I_d = \ker(p)$. ∎

§47. Pfafiano y matrices antisimétricas

El objetivo de esta sección es aplicar el teorema espectral (ver §43) y las propiedades del álgebra exterior (ver §46) para estudiar matrices anti-simétricas, ie, que cumplen ${}^tA = -A$.

$\boxed{\text{¡Atención!}}$ Durante toda está sección asumiremos $car(k) = 0$ (eg. $k = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). En particular, $\mathbb{Q} \subseteq k$.

Motivación: Toda matriz anti-simétrica 2×2 se escribe como
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in k .$$
En particular, $\det(A) = \lambda^2$ es el cuadrado de la función $\mathcal{P}(A) := \lambda$. En esta sección veremos que toda matriz anti-simétrica real puede escribirse en términos de bloques 2×2 como el anterior, y que el determinante es el cuadrado de una función: el pffafiano.

Obs: Si $A \in M_m(k)$ anti-simétrica es invertible (ie, $A \in GL_m(k)$) entonces $m = 2n$ es par: ${}^tA = -A \Rightarrow \det(A) = \det({}^tA) = \det(-A) = (-1)^m \det(A) = 0$ si m impar.

Teorema espectral (caso anti-simétrico): Sea $V \cong \mathbb{R}^n$ espacio euclideano y $u : V \to V$ endomorfismo anti-simétrico (ie, $u^* = -u$). Entonces, existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ de V y reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}^{>0}$ positivos tales que
$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{cc|c|cc|c} 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \hline \vdots & & 0 & 0 & \lambda_s & \vdots \\ \vdots & & 0 & -\lambda_s & 0 & \vdots \\ \hline 0 & & 0 & 0 & 0 & 0_{n-r} \end{array}\right) \quad \text{donde } r = rg(u) = 2s$$
y donde $\pm i\lambda_1, \ldots, \pm i\lambda_s \in i\mathbb{R}$ son los valores propios no-nulos de u.