§45. Álgebra tensorial

Comenzamos por una generalización natural del concepto de m-forma multilineal (ver §9):

Def: Sean $V_1, \dots, V_d, \mathcal{U}$ k-ev. Una aplicación d-lineal (o d-multilineal) es una función $f : V_1 \times \dots \times V_d \to \mathcal{U}$ que es lineal en cada variable. Denotaremos $\mathrm{Mult}^d(V_1 \times \dots \times V_d, \mathcal{U}) = \{ f : V_1 \times \dots \times V_d \to \mathcal{U} \ d\text{-lineal}\}$ al k-ev correspondiente.

Siguiendo exactamente el mismo procedimiento que en el caso bilineal (ver §44), dados $V_1, \dots, V_d$ k-ev construimos un k-ev $V_1 \otimes \dots \otimes V_d$ producto tensorial junto con una aplicación d-lineal universal

$$t : V_1 \times \dots \times V_d \longrightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_d \,,$$

de tal suerte que $\mathrm{Mult}^d(V_1 \times \dots \times V_d, \mathcal{U}) \cong \mathrm{Hom}_k(V_1 \otimes \dots \otimes V_d, \mathcal{U})$ para todo k-ev $\mathcal{U}$.
Más aún, si tenemos d aplicaciones lineales $f_i : V_i \to W_i$ $(i = 1, \dots, d)$, la propiedad universal permite "tensorizarlas" y obtener una única aplicación lineal

$$f_1 \otimes \dots \otimes f_d : V_1 \otimes \dots \otimes V_d \longrightarrow W_1 \otimes \dots \otimes W_d$$

que para todo tensor simple $v_1 \otimes \dots \otimes v_d$ verifica $(f_1 \otimes \dots \otimes f_d)(v_1 \otimes \dots \otimes v_d) = f_1(v_1) \otimes \dots \otimes f_d(v_d)$.

Obs: Vimos en §44 que $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ y $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ son canónicamente isomorfos (ie, existe un isomorfismo construido sin escoger bases). No es difícil verificar que ambos son canónicamente isomorfos a $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$.

Recuerdo (k-álgebra): Recordemos que (ver §4, pág 8) una k-álgebra es un k-ev A dotado de un producto $A \times A \to A$, $(a,b) \mapsto ab$ que es una aplicación k-bilineal y que dota a A de estructura de anillo. Así, la multiplicación es asociativa pero no necesariamente conmutativa.

Todas las álgebras que consideraremos poseen una unidad, ie, $\exists !\ 1 \in A$ tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \forall a \in A$. Notar que $1 = 0 \iff A = 0$.

Def: Sea A una k-álgebra. Decimos que A es una álgebra graduada si existe una descomposición (eventualmente infinita)

$$A = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} A_d = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \dots$$

en suma directa de espacios vectoriales tal que $\forall d, e \in \mathbb{N} : A_d \cdot A_e \subseteq A_{d+e}$.
En part, $1 \in A_0$. $(\Rightarrow k := k \cdot 1 \subseteq A_0)$. Más aún, un morfismo de álgebras graduadas es un morfismo de álgebras $f : A \to B$ (ie, $f(a_1 a_2) = f(a_1) f(a_2)\ \forall a_1, a_2 \in A$ y f lineal) que además preserva la graduación: $f(A_d) \subseteq B_d$ para todo $d \in \mathbb{N}$.

Ejemplo: El álgebra (conmutativa) $k[X]$ de polinomios en una variable está graduada (por el grado): $k[X] = \bigoplus_{d \geq 0} \mathrm{Vect}_k \langle X^d \rangle$. Más generalmente, el álgebra $A = k[X_1, \dots, X_r]$ de polinomios en r variables está graduada si definimos a A_d como el sub-ev generado por polinomios homogeneos de grado total d, ie, generado por los monomios $X_1^{i_1} \cdots X_r^{i_r}$ con $i_1 + \dots + i_r = d$.

<u>Terminología</u>: Sea $A = \bigoplus_{d \geq 0} A_d$ k-álgebra graduada. Un elemento no-nulo $x \in A \setminus \{0\}$ se dice <u>homogéneo</u> si existe $d \in \mathbb{N}$ (necesariamente único) tq $x \in A_d$. Diremos que x <u>es de grado d</u>.

<u>Def</u>: Sea V un k-ev. Definimos las <u>potencias tensoriales</u> de V como $T^0 V := k$ y, para $d \geq 1$:

$$T^d V := \overbrace{V \otimes \cdots \otimes V}^{d \text{ veces}} =: V^{\otimes d}.$$

En part (y por definición), $(T^d V)^* \cong \mathrm{Mult}^d(V^d, k)$ es el k-ev de formas d-lineales en V.
Más aún, definimos el <u>álgebra tensorial</u> de V por

$$TV := \bigoplus_{d \geq 0} T^d V = k \oplus V \oplus T^2 V \oplus T^3 V \oplus \cdots$$

donde el producto en TV está dado por

$$T^d V \times T^e V \longrightarrow T^{d+e} V$$
$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d, w_1 \otimes \cdots \otimes w_e) \longmapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_d \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_e,$$

y cuya unidad es $1 \in k = T^0 V$. Así, TV es una k-álgebra graduada.

<u>Obs</u>: ① El álgebra tensorial TV <u>no</u> es conmutativa si $\dim_k(V) \geq 2$, pues $v_1 \otimes v_2 \neq v_2 \otimes v_1$ si v_1 y v_2 no son proporcionales.

② Dado que $T^1 V = V$, hay una inclusión canónica $i : V \hookrightarrow TV$.

③ Si $\{e_i\}_{i \in I}$ es una base de V, entonces TV tiene por base todos los tensores $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_d}$ para $d \in \mathbb{N}$ y $i_1, \ldots, i_d \in I$. En part, incluso si V es de dimensión finita, el k-ev TV es siempre de dimensión infinita si $V \neq 0$.

<u>Teorema</u> (propiedad universal): El álgebra tensorial TV satisface la propiedad universal siguiente:

"Para toda aplicación lineal $f : V \to A$ a una k-álgebra con unidad A, existe un <u>único</u> morfismo de álgebras $\hat{f} : TV \to A$ tal que $f = \hat{f} \circ i$, con $i : V \hookrightarrow TV$."

En otras palabras, el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & A \\ TV \arrow[ur, "\exists ! \hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

<u>Dem</u>: Como la aplicación $V^d \to A$, $(v_1, \ldots, v_d) \mapsto f(v_1) \cdots f(v_d)$ es d-lineal, la propiedad universal de $T^d V$ permite definir la aplicación lineal $\hat{f}_d : T^d V \to A$ para todo $d \in \mathbb{N}$, y en particular $\hat{f} = \bigoplus_{d \geq 0} \hat{f}_d : TV \to A$. Basta ver que $\hat{f}$ es un morfismo de álgebras: es suficiente verificarlo para tensores simples (que generan TV)

$$\hat{f}((v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) \otimes (w_1 \otimes \cdots \otimes w_e)) = f(v_1) \cdots f(v_d) f(w_1) \cdots f(w_e)$$
$$= \hat{f}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) \hat{f}(w_1 \otimes \cdots \otimes w_e) \quad \checkmark \quad \blacksquare$$

<u>Obs</u>: Como en todos los casos anteriores, la propiedad universal implica que la construcción es "functorial": si $f : V \to W$ aplicación lineal, existe un <u>único</u> morfismo de álgebras $Tf : TV \to TW$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_V"] & W \arrow[d, "i_W"] \\ TV \arrow[r, "Tf"'] & TW \end{tikzcd}$$ es conmutativo.

En efecto, Tf no es nada más que $\bigoplus_{d\geq 0} T^d f$, donde $T^d f = f^{\otimes d} = \overbrace{f\otimes\cdots\otimes f}^{d \text{ veces}}$.
Más aún, $T(f\circ g) = Tf \circ Tg$ (En términos más sofisticados, T es un "functor" entre las "categorías" de k-espacios vectoriales y la de k-álgebras).

Caso particular importante: En Física (y en Geometría Diferencial) se consideran ciertos tensores particulares: Sea V un k-ev de $\dim_k(V) = n$ y sea $V^* = \mathrm{Hom}_k(V,k)$ su espacio dual. Durante este parrafo (y para simplificar la notación), si $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ es una base de V, entonces denotaremos por $\mathcal{B}^* = (e^1,\dots,e^n)$ la respectiva base dual de V^* (ie, $e^i(e_j) = \delta_{ij}$ o bien $e^i(e_j) = \delta^i_j$).

Def: Sea $V \cong k^n$ un k-ev y sea V^* el espacio dual. Un tensor p-covariante y q-contravariante es un elemento del producto tensorial
$$\underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{p \text{ veces}} \otimes \underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{q \text{ veces}} = T^pV^* \otimes T^qV.$$
También diremos que son tensores de tipo (p,q). Explícitamente, si $(e_1,\dots,e_n)$ es una base de V y $(e^1,\dots,e^n)$ es la base dual de V^*, entonces todo tensor T de tipo (p,q) se escribe como:
$$T = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_q \\ j_1,\dots,j_p}} T^{i_1\cdots i_q}_{j_1\cdots j_p}\, e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_p}\otimes e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_q}$$
pues los vectores de la forma $e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_p}\otimes e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_q}$ forman una base de $T^pV^*\otimes T^qV$.

Convención de Einstein: La "notación de Einstein" (aunque en realidad es un caso particular del "cálculo de Ricci" desarrollado 30 años antes...) consiste en omitir los símbolos de sumatorias. Así, un tensor de tipo (p,q) se escribe como:
$$T = T^{i_1\cdots i_q}_{j_1\cdots j_p}\, e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_p}\otimes e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_q}$$
y decimos que los coeficientes $T^{i_1\cdots i_q}_{j_1\cdots j_p} \in k$ son las coordenadas del tensor T.
Por ejemplo, $y = \sum_{i=1}^3 x^i e_i = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$ se reduce a escribir $y = x^i e_i$.

Ejemplo: Sea $v = v^i e_i$ un vector de V. Vimos que (§44, pág 142) todo endomorfismo es un tensor de tipo $(1,1)$, pues $\mathrm{End}_k(V) \underset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_k(V,V) \cong V^*\otimes V$. Así, si $(e'_1,\dots,e'_n)$ es otra base de V y $P = (P^i_j)$ es la matriz de cambio de base $\Rightarrow e'_j = P^i_j e_i$. Luego, si escribimos $v = v'^j e'_j \Rightarrow v = v'^j e'_j = v'^j P^i_j e_i$
y luego $v^i = P^i_j v'^j$, o bien: $v'^j = (P^{-1})^j_i v^i$.

Observamos que las coordenadas de v se transforman en sentido inverso a los vectores de las bases (de aquí el término "contravariante"). Recíprocamente, para una forma lineal $f = f_j e^j = f'_i e'^i$ se tiene que:

$f'_i = f(e'_i) = f(P^j_i e_j) = P^j_i f_j$, ie, las coordenadas de $f \in V^*$ se transforman en el mismo sentido que las bases (de aquí el término "covariante").

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Para un tensor de tipo (p,q) de coordenadas $(T^{i_1 \cdots i_q}_{j_1 \cdots j_p})$, probar que las coordenadas en la base $(e'_1, \dots, e'_m)$ son

$$(T')^{i'_1 \cdots i'_q}_{j'_1 \cdots j'_p} = (P^{-1})^{i'_1}_{i_1} \cdots (P^{-1})^{i'_q}_{i_q} P^{j_1}_{j'_1} \cdots P^{j_p}_{j'_p} T^{i_1 \cdots i_q}_{j_1 \cdots j_p} .$$

<u>Obs</u>: Generalmente, los cálculos anteriores se hacen en presencia de una "métrica", ie, una forma bilineal $B : V \times V \to k$ no-degenerada (eg, producto escalar o forma de Lorentz) y decimos que B es el <u>tensor métrico</u>:

Dado que $\mathrm{Bil}(V \times V, k) \cong (V \otimes V)^* \cong V^* \otimes V^*$, pensamos B como un tensor de tipo $(2,0)$ (o 2-covariante) y denotamos su matriz por $g_{ij} = B(e_i, e_j)$ en la base $(e_1, \dots, e_m)$ de V.

Como B es no-degenerada, $\widehat{B} : V \xrightarrow{\sim} V^*$, $x \mapsto B(x, \cdot)$ es un isomorfismo que identifica vectores (contravariantes) y formas lineales (covariantes). En coordenadas:

$\widehat{B}(e_j)(e_i) = B(e_j, e_i) = g_{ji} \Rightarrow \widehat{B}(v^j e_j) = v^j g_{ji} e^i$

Así, pasamos de coord. ~~covariantes~~ contravariantes (v^j) a coord. covariantes (v_i) mediante la fórmula $v_i = v^j g_{ji}$.

Finalmente, observamos que el isomorfismo $\widehat{B}$ permite transportar la métrica B a una métrica B^* en V^*. Explícitamente, la matriz $g^{ij} := B^*(e^i, e^j)$ de B^* resp. a la base dual $(e^1, \dots, e^m)$ de V^* es la inversa de la matriz (g_{ij}), ie, $g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$. Este "tensor métrico dual" permite pasar de coordenadas covariantes a contravariantes mediante la fórmula $v^j = v_i g^{ij}$, y en particular:

$$B(u, v) = u^i v_i = u_i v^i = g_{ij} u^i v^j = g^{ij} u_i v_j .$$

§46. <u>Álgebra exterior y formas multilineales alternadas</u>

Por un lado, en la construcción del álgebra tensorial $TV = \bigoplus_{d \geq 0} T^d V$ tenemos que $(T^d V)^* \cong \mathrm{Mult}^d(V \overset{d \text{ veces}}{\times \dots \times} V, k)$ son canónicamente isomorfos. Por otro lado, estudiamos en §9 las formas multilineales alternadas: una forma d-lineal $\omega : V \overset{d \text{ veces}}{\times \dots \times} V \to k$ es <u>alternada</u> si $\omega(v_1, \dots, v_d) = 0$ cuando dos de los $v_1, \dots, v_d$ son iguales. Más aún, si denotamos por

$$\mathrm{Alt}^d(V) = \{ \omega : V \overset{d \text{ veces}}{\times \dots \times} V \to k \text{ } d\text{-lineal alternada} \}$$

al k-ev de formas d-lineales alternadas, entonces vimos en §10 que si $n = \dim_k(V)$ entonces <u>toda</u> forma n-lineal alternada es proporcional al determinante, ie, $\mathrm{Alt}^n(V) = \mathrm{Vect}_k(\det)$.

El objetivo de esta sección es realizar una construcción análoga a ~~...~~ $\mathrm{Alt}^d(V)$ en TV (que será <u>dual</u> a $\mathrm{Alt}^d(V)$ en un sentido preciso).