§44. Producto tensorial de espacios vectoriales:

<u>Motivación</u>: Sea k un cuerpo arbitrario. El objetivo de los "<u>tensores</u>" es describir formas multilineales (ie, lineales en cada variable) $T : V_1 \times \ldots \times V_p \longrightarrow W$, donde $V_1, \ldots, V_p, W$ son k-ev.

Los tensores son muy útiles en matemática y en física, y fueron introducidos en 1846 por Hamilton. Comencemos por el caso "2-multilineal", ie, <u>bilineal</u>:

<u>Def</u>: Sean V y W dos k-ev. Un <u>producto tensorial</u> de V y W es un par (T, t), donde T es un k-ev. y una aplicación <u>bilineal</u> $t : V \times W \to T$ verificando la siguiente "propiedad universal":

"Para todo k-ev $\mathcal{U}$ y toda aplicación bilineal $B : V \times W \to \mathcal{U}$, existe una <u>única</u> aplicación <u>lineal</u> $\hat{B} : T \to \mathcal{U}$ tal que $B = \hat{B} \circ t$."

En otras palabras, el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[rr, "B"] \arrow[dr, "t"'] & & \mathcal{U} \\ & T \arrow[ur, "\exists!\, \hat{B}"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

<u>Teorema</u>: Sean V y W dos k-ev. Entonces, existe un producto tensorial (T, t) de V y W, el cual es único módulo un único isomorfismo. Denotaremos $T := V \otimes_k W$ (o simplemente $V \otimes W$) y para $v \in V$ y $w \in W$, $t(v, w) := v \otimes w$.

<u>Dem</u>: Veamos la existencia: Sea $k^{V \times W}$ el k-ev de base (no necesariamente finita!) $\{e_{(v,w)}\}_{(v,w) \in V \times W}$, ie, un elemento de $k^{V \times W}$ es de la forma:

$$\sum_{\text{finita}} \lambda_{(v,w)} e_{(v,w)}, \quad \text{donde } \lambda_{(v,w)} \in k.$$

Importante: la aplicación $V \times W \to k^{V \times W}$, $(v, w) \mapsto e_{(v,w)}$ <u>no</u> es bilineal!

Sin embargo, si $S \subseteq k^{V \times W}$ es el k-sub-ev generado por todos los vectores de la forma:

$e_{(v+v', w)} - e_{(v,w)} - e_{(v',w)}$; $e_{(v, w+w')} - e_{(v,w)} - e_{(v,w')}$; $e_{(\lambda v, w)} - \lambda e_{(v,w)}$ y $e_{(v, \lambda w)} - \lambda e_{(v,w)}$, donde $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ y $\lambda \in k$.

$\Rightarrow$ El k-ev. <u>cociente</u> $T := k^{V \times W}/S$ dotado de la aplicación <u>bilineal</u>

$$t : V \times W \longrightarrow T, \quad (v, w) \longmapsto [e_{(v,w)}]$$

es un producto tensorial de V y W. En efecto: si denotamos $V \otimes W := T$ y $v \otimes w := t(v, w) = [e_{(v,w)}]$, entonces para toda aplicación $B : V \times W \to \mathcal{U}$ bilineal se tiene que la aplicación inducida $B' : k^{V \times W} \to \mathcal{U}$, $e_{(v,w)} \mapsto B(v, w)$ es lineal y, por construcción (!), se anula en S: $B'(S) = \{0_{\mathcal{U}}\}$.

Propiedad universal del cociente $\Rightarrow \exists!\, \hat{B} : k^{V \times W}/S = T \longrightarrow \mathcal{U}$ tal que $B = \hat{B} \circ t$.

Explícitamente: Si $v \otimes w \in T$, entonces $\hat{B}(v \otimes w) = B(v, w)$.

Unicidad (módulo único isomorfismo): Usamos la propiedad universal de (T,t): si (T',t') es otro producto tensorial de V y W, entonces:

$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "t'"] \arrow[dr, "t"'] & T' \\ & T \arrow[u, "\exists!\,\alpha"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "t'"'] & T \\ & T' \arrow[u, "\exists!\,\beta"'] \end{tikzcd}$$

donde $t' = \alpha\circ t$ y $t = \beta\circ t' \Rightarrow t' = \alpha\circ t = (\alpha\circ\beta)\circ t'$ y $t = \beta\circ t' = (\beta\circ\alpha)\circ t$.
Como α y β son únicos, entonces $\alpha\circ\beta$ y $\beta\circ\alpha$ son únicos. Luego, necesariamente $\alpha\circ\beta = Id_{V'}$ y $\beta\circ\alpha = Id_V$, ie, α y β son isomorfismos ✓ ■

Recuerdo (notación): Sean $\mathcal{U}, V, W$ tres k-ev. Recordemos que:
$Hom_k(V,W) = \{f: V\to W \text{ lineal}\}$, $V^* = Hom_k(V,k)$ (espacio dual) y
$Bil_k(V\times W, \mathcal{U}) := \{B: V\times W \to \mathcal{U} \text{ aplicación } k\text{-bilineal}\}$ son k-ev.

Corolario: Sean $\mathcal{U}, V, W$ tres k-ev. Entonces, hay un isomorfismo:

$$Bil_k(V\times W, \mathcal{U}) \cong Hom_k(V\otimes W, \mathcal{U}).$$

En part, $Bil_k(V\times W, k) = \{B: V\times W \to k \text{ forma bilineal}\} \cong (V\otimes W)^*$.

Dem: La aplicación $B \mapsto \widehat{B}$ es un isomorfismo. ■

Ejemplo: Sea $V = \mathbb{R}^2$ y $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ base canónica. La forma bilineal $B: V\times V \to \mathbb{R}$ dada por $B((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = a x_1 y_1 + b x_1 y_2 + c x_2 y_1 + d x_2 y_2$ está determinada por $a = B(e_1,e_1)$, $b = B(e_1,e_2)$, $c = B(e_2,e_1)$ y $d = B(e_2,e_2)$. Por otro lado:
$V\otimes V = Vect_{\mathbb{R}}\langle e_1\otimes e_1, e_1\otimes e_2, e_2\otimes e_1, e_2\otimes e_2\rangle \cong \mathbb{R}^4$ donde por definición se cumple: $\lambda(e_i\otimes e_j) = (\lambda e_i)\otimes e_j = e_i\otimes(\lambda e_j)$ $\forall \lambda\in\mathbb{R}$.

En part, $(x_i e_i \otimes y_j e_j) = x_i y_j (e_i\otimes e_j)$ para $x_i, y_j \in \mathbb{R}$ y luego
$(x_1 e_1 + y_1 e_2)\otimes(x_2 e_1 + y_2 e_2) = x_1 x_2 (e_1\otimes e_1) + x_1 y_2 (e_1\otimes e_2) + x_2 y_1 (e_2\otimes e_1) + x_2 y_2 (e_2\otimes e_2)$
Finalmente, $f: V\otimes V \to \mathbb{R}$ en $(V\otimes V)^*$ está determinada por los valores $a' = f(e_1\otimes e_1)$, $b' = f(e_1\otimes e_2)$, $c' = f(e_2\otimes e_1)$ y $d' = f(e_2\otimes e_2)$.
$\Rightarrow f\in(V\otimes V)^*$ y $B\in Bil(V\times V,\mathbb{R})$ son "lo mismo".

⚠ Importante: En general, un vector en $V\otimes_k W$ no es de la forma $v\otimes w$ con $v\in V$ y $w\in W$, sino que es una suma finita de la forma

$$\lambda_1(v_1\otimes w_1) + \lambda_2(v_2\otimes w_2) + \dots + \lambda_r(v_r\otimes w_r) \quad \text{con } v_i\in V, w_i\in W, \lambda_i\in k.$$

Los elementos de $V\otimes W$ serán llamados tensores. Los tensores de la forma $v\otimes w$ con $v\in V$ y $w\in W$ son llamados tensores simples o tensores descomponibles; ellos generan el k-ev. $V\otimes_k W$ por construcción.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $V\cong\mathbb{R}^2$ de base (e_1,e_2) y $W\cong\mathbb{R}^2$ de base (f_1,f_2). Probar que $T = a\, e_1\otimes f_1 + b\, e_1\otimes f_2 + c\, e_2\otimes f_1 + d\, e_2\otimes f_2 \in V\otimes W$ es un tensor simple si y sólo si $ad - bc = 0$.

Lema: Sean V y W dos $\Bbbk$-ev. Sea $\{v_i\}_{i\in I}$ una base de V y sea $\{w_j\}_{j\in J}$ una base de W. Entonces, $\{v_i\otimes w_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ es una base de $V\otimes W$. En part, si V y W son de dimensión finita, entonces:

$$\dim_{\Bbbk}(V\otimes W) = \dim_{\Bbbk}(V)\cdot \dim_{\Bbbk}(W).$$

Dem: Por construcción de $V\otimes W$, $\{v_i\otimes w_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ es una familia generadora. Veamos que es linealmente independiente: Para $i\in I$ y $j\in J$ definimos las formas lineales $f_i\in V^*$ y $g_j\in W^*$ dadas por $f_i(v_k)=\delta_{ik}=\begin{cases}1 & \text{si } i=k\\ 0 & \text{si } i\neq k\end{cases}$ y por $g_j(w_k)=\delta_{jk}=\begin{cases}1 & \text{si } j=k\\ 0 & \text{si } j\neq k\end{cases}$. Ahora, consideremos $\varphi_{ij}: V\times W\to \Bbbk$ forma bilineal dada por $\varphi_{ij}(v,w)=f_i(v)\,g_j(w) \underset{\text{Prop. Universal}}{\Longrightarrow} \exists!\ \hat{\varphi}_{ij}: V\otimes W\to\Bbbk$ lineal tal que

$$\hat{\varphi}_{ij}(v_k\otimes w_l)=\varphi_{ij}(v_k,w_l)=f_i(v_k)\,g_j(w_l)=\delta_{ik}\,\delta_{jl}=\begin{cases}1 & \text{si } i=k \text{ y } j=l\\ 0 & \text{sino.}\end{cases}$$

Aplicando las formas lineales $\hat{\varphi}_{ij}$ a cualquier combinación lineal de elementos de $\{v_i\otimes w_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ deducimos que estos son linealmente independientes ✓ ■

El siguiente resultado muestra que podemos tensorizar aplicaciones lineales:

Prop (functorialidad): Sean $f: V\to V'$ y $g: W\to W'$ aplicaciones lineales entre $\Bbbk$-ev. Entonces, existe una única aplicación lineal

$$f\otimes g: V\otimes W\to V'\otimes W'$$

que para todo tensor simple $v\otimes w$ verifica $(f\otimes g)(v\otimes w)=f(v)\otimes g(w)$. Más aún, el producto tensorial de aplicaciones lineales verifica:

$$(f'\otimes g')\circ(f\otimes g)=(f'\circ f)\otimes(g\circ g').$$

Dem: Basta completar el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
V\times W \arrow[r, "{(f,g)}"] \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, "\text{bilineal}"] & V'\times W' \arrow[d, "t'"] \\
V\otimes W \arrow[r, dashed, "\exists!\, f\otimes g"'] & V'\otimes W'
\end{tikzcd}$$

Es decir, $f\otimes g$ se obtiene al aplicar la propiedad universal a la aplicación bilineal $t'\circ(f,g)$. La última parte se deduce del mismo modo (Ejercicio). ■

A continuación describimos las principales propiedades del producto tensorial:

Teorema: Sean U, V y W tres $\Bbbk$-ev. Entonces, hay isomorfismos "canónicos":

1. $\Bbbk\otimes V\xrightarrow{\sim} V$, dado por $\lambda\otimes v\mapsto \lambda v$.
2. $(U\oplus V)\otimes W\xrightarrow{\sim}(U\otimes W)\oplus(V\otimes W)$, dado por $(u+v)\otimes w\mapsto u\otimes w+v\otimes w$.
3. $U\otimes V\xrightarrow{\sim} V\otimes U$, dado por $u\otimes v\mapsto v\otimes u$.
4. $U\otimes(V\otimes W)\xrightarrow{\sim}(U\otimes V)\otimes W$, dado por $u\otimes(v\otimes w)\mapsto(u\otimes v)\otimes w$.

Aquí, la fórmula de cada isomorfismo está descrita para tensores simples, y se extiende linealmente para tensores arbitrarios (ie, suma finita de tensores simples).

Dem: La aplicación $\Bbbk\times V\to V$, $(\lambda,v)\mapsto\lambda v$ es bilineal $\Rightarrow \exists!$ aplicación lineal inducida $\Bbbk\otimes V\to V$, $\lambda\otimes v\mapsto\lambda v$. Su inversa es $v\mapsto 1\otimes v$. $\rightsquigarrow$ 1 ✓

Para probar ② consideramos la aplicación bilineal $(\mathcal{U}\oplus V)\times W \longrightarrow (\mathcal{U}\otimes W)\oplus(V\otimes W)$
$(u+v, w) \longmapsto (u\otimes w + v\otimes w)$
$\Rightarrow \exists!\ \varphi : (\mathcal{U}\oplus V)\otimes W \to (\mathcal{U}\otimes W)\oplus(V\otimes W)$ tal que $\varphi((u+v)\otimes w) = u\otimes w + v\otimes w$.
Por otro lado, las inclusiones $i_1 : \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{U}\oplus V$, $u \mapsto u+0$ y $i_2 : V \hookrightarrow \mathcal{U}\oplus V$, $v\mapsto 0+v$ inducen, al tensorizar con $Id_W : W\to W$ aplicaciones lineales

$$i_1\otimes Id_W : \mathcal{U}\otimes W \longrightarrow (\mathcal{U}\oplus V)\otimes W \quad y \quad i_2\otimes Id_W : V\otimes W \to (\mathcal{U}\oplus V)\otimes W.$$

$\Rightarrow \psi := (i_1\otimes Id_W, i_2\otimes Id_W) : (\mathcal{U}\otimes W)\oplus(V\otimes W) \to (\mathcal{U}\oplus V)\otimes W$ es la inversa de φ.
En efecto, $\psi(\varphi((u+v)\otimes w)) = \psi(u\otimes w + v\otimes w) = (i_1\otimes Id_W)(u\otimes w) + (i_2\otimes Id_W)(v\otimes w)$

$$= (u+0)\otimes w + (0+v)\otimes w = (u+v)\otimes w.$$

ie, $\psi\circ\varphi = Id_{(\mathcal{U}\oplus V)\otimes W}$, similar para $\varphi\circ\psi$ ✓ Los isomorfismos ③ y ④ son similares. ∎

Ejemplo importante (producto de Kronecker): Sean V_1, V_2, W_1 y W_2 k-ev de dimensión finita. Sean $(v_{1,j})_{j\in I_1}$ base de V_1; $(v_{2,i})_{i\in I_2}$ base de V_2; $(w_{1,l})_{l\in J_1}$ base de W_1 y sea $(w_{2,k})_{k\in J_2}$ base de W_2.

Si $f : V_1\to V_2$ y $g : W_1\to W_2$ son aplicaciones lineales cuyas matrices en las bases respectivas son $A = (a_{ij})_{i\in I_2, j\in I_1}$ y $B = (b_{kl})_{k\in J_2, l\in J_1}$ entonces:

$$(f\otimes g)(v_{1,j}\otimes w_{1,l}) = f(v_{1,j})\otimes g(w_{1,l}) = \sum_{i\in I_2,\, k\in J_2} a_{ij}\, b_{kl}\,(v_{2,i}\otimes w_{2,k})$$

Luego, la matriz de $f\otimes g$ respecto a las bases $(v_{1,j}\otimes w_{1,l})_{(j,l)\in I_1\times J_1}$ de $V_1\otimes W_1$ y $(v_{2,i}\otimes w_{2,k})_{(i,k)\in I_2\times J_2}$ de $V_2\otimes W_2$ es:

$$A\otimes B := (a_{ij}\, b_{kl})_{(i,k)\in I_2\times J_2,\ (j,l)\in I_1\times J_1}. \quad (\text{"producto de Kronecker"})$$

Concretamente, si por ejemplo todos los espacios V_1, V_2, W_1 y W_2 son de dimensión 2:

$$A\otimes B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22}\end{pmatrix}$$

En general, $A\otimes B \neq B\otimes A$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que $rg(A\otimes B) = rg(A)\, rg(B)$. Más aún, probar que si $A\in M_n(k)$ y $B\in M_m(k)$ son matrices cuadradas, entonces $tr(A\otimes B) = tr(A)\, tr(B)$ y $det(A\otimes B) = det(A)^m\, det(B)^n$.

Ejemplo importante (las matrices son tensores): Veremos que toda matriz puede ser pensada como un tensor. Más generalmente, consideremos la aplicación lineal

$$\varphi : V^*\otimes W \longrightarrow Hom_k(V,W)$$
$$f\otimes w \longmapsto (v\mapsto f(v)\,w)$$

Veamos que φ es inyectiva: si $\{w_j\}_{j\in J}$ es una base de W, entonces sabemos que todo elemento de $V^*\otimes W$ es una suma finita de tensores simples $\sum_{\substack{\text{finita}\\ j\in J}} f_j\otimes w_j$, donde cada $f_j\in V^*$ forma lineal en V.

Si su imagen por φ es nula en $\operatorname{Hom}_{\Bbbk}(V,W)$, entonces $\sum_{\text{finita}} f_j(v)\,w_j = 0 \quad \forall v \in V$.
$\Rightarrow f_j(v) = 0 \quad \forall v \in V$ para todo j, pues $\{w_j\}_{j\in J}$ es una base de $W \Rightarrow f_j = 0 \quad \forall j \in J$ ✓

La aplicación φ no siempre es sobreyectiva: dado que tomamos combinaciones lineales finitas, su imagen en $\operatorname{Hom}_{\Bbbk}(V,W)$ consiste en las aplicaciones lineales de rango finito.
En part, si V o W es de dimensión finita $\Rightarrow \varphi : V^* \otimes W \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(V,W)$ isomorfismo.
Explícitamente, si $\dim_{\Bbbk}(V) = n$ y $(v_1, \dots, v_n)$ base de V, de base dual $(v_1^*, \dots, v_n^*)$ entonces para todo $u \in \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(V,W)$ se tiene

$$\varphi^{-1}(u) = \sum_{j=1}^{n} v_j^* \otimes u(v_j).$$

Ejercicio ¿Cuál es la imagen por φ del conjunto de tensores simples de $V^* \otimes W$?

Una aplicación típica de los tensores es usarlos para formalizar la intuición de pasar de un $\Bbbk$-ev a un K-ev, donde $\Bbbk \subseteq K$ (eg. $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$):

Ejemplo (extensión de escalares): Sean $\Bbbk$ y K cuerpos tales que $\Bbbk \subseteq K$. Si V es un $\Bbbk$-ev, entonces dado K también es un $\Bbbk$-ev podemos considerar

$$V_K := K \otimes_{\Bbbk} V \cong V \otimes_{\Bbbk} K.$$

$\Rightarrow V_K$ es un $\Bbbk$-ev, pero también un K-ev: si $\lambda \in K$, la multiplicación por λ es $m_\lambda : \begin{array}{l} K \to K \\ x \mapsto \lambda x \end{array}$ un endomorfismo $\Bbbk$-lineal de K.

Luego, podemos definir la multiplicación por $\lambda \in K$ en V_K como el endomorfismo $m_\lambda \otimes \mathrm{Id}_V$. Las propiedades de K-ev son fáciles de verificar.
Decimos que V_K se obtiene a partir de V por extensión de escalares de $\Bbbk$ a K.
Más aún, $\dim_K(V_K) = \dim_{\Bbbk}(V)$ pues si $\{v_i\}_{i\in I}$ es una base de V, entonces $\{1 \otimes v_i\}_{i\in I}$ es una base de V_K como K-ev.
Por otro lado, un endomorfismo $u : V \to V$ en $\operatorname{End}_{\Bbbk}(V)$ se extiende a $u_K : V_K \to V_K$ en $\operatorname{End}_K(V_K)$ al definir $u_K := \mathrm{Id}_K \otimes u$. Matricialmente, si la matriz de u es $A \in M_n(\Bbbk)$ resp. a una base $\{v_i\}$ de V, entonces u_K posee la misma matriz $A \in M_n(K)$ resp. a la base $\{1 \otimes v_i\}$ de V_K.
Caso particular importante: si $\Bbbk = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$, entonces $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ es la complejificación del $\mathbb{R}$-ev V. En part, $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n \cong \mathbb{C}^n$.

Ejercicio Sean V_1 y V_2 dos espacios vectoriales complejos de dimensión finita > 0. Probar que los espacios $V_1 \otimes_{\mathbb{C}} V_2$ y $V_1 \otimes_{\mathbb{R}} V_2$ no son isomorfos como espacios vectoriales reales.

Ejercicio Importante Sean V y W dos $\Bbbk$-ev. de dimensión finita. Probar que $\psi : V^* \otimes W^* \xrightarrow{\sim} (V \otimes W)^*$, $f \otimes g \mapsto (v \otimes w \mapsto f(v)\,g(w))$ es un isomorfismo.