§43. Producto escalar complejo y espacios hermitianos.

Def: Sea $V \cong \mathbb{C}^n$ ev. Un producto escalar complejo es una forma hermitiana $h: V \times V \to \mathbb{C}$ definida positiva. Un espacio hermitiano es un espacio vectorial complejo de dimensión finita dotado de un producto escalar complejo.

Notación: El producto escalar entre dos vectores $x, y \in V$ se denota $\langle x, y \rangle$. Luego, la forma hermitiana $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ verifica: Para todos $x, y, z \in V$ y $\lambda \in \mathbb{C}$

1. Lineal en 1^{ra} variable: $\langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.
2. Anti-lineal en 2^{da} variable: $\langle x, \lambda y + z \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$.
3. Simetría hermitiana: $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
4. Definida positiva: $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}^{>0}$ para todo $x \neq 0$.

Ejemplo principal (cf. Teorema de Sylvester): Para $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ en $\mathbb{C}^n$

$$\langle x, y \rangle := x_1 \overline{y_1} + \dots + x_n \overline{y_n} \quad \text{"producto escalar canónico"}.$$

Def: Sea $V \cong \mathbb{C}^n$ espacio hermitiano, y sea $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ una base de V. Decimos que $\mathcal{B}$ es una base ortonormal si $\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$.

Obs: El Teorema de Sylvester implica que todo espacio hermitiano posee al menos una base ortonormal.

Teorema (proyección ortogonal): Sea $V \cong \mathbb{C}^n$ espacio hermitiano y sea $\mathcal{U}^\perp$ el ortogonal (resp. al producto escalar) de un sub-ev $\mathcal{U} \subseteq V$. Entonces:

1. $V = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp$ y la aplicación $p_{\mathcal{U}}: V \to V$ inducida es lineal y verifica $\operatorname{Im}(p_{\mathcal{U}}) = \mathcal{U}$ y $\ker(p_{\mathcal{U}}) = \mathcal{U}^\perp$, es la proyección ortogonal sobre $\mathcal{U}$.
2. Si $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{U}) = r$ y $(e_1, \dots, e_r)$ base ortonormal de $\mathcal{U}$, entonces:
$$p_{\mathcal{U}}(x) = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle x, e_r \rangle e_r \quad \text{para todo } x \in V.$$
3. $(\mathcal{U}^\perp)^\perp$ y en particular $p_{\mathcal{U}} + p_{\mathcal{U}^\perp} = \mathrm{Id}_V$.

Dem: Idéntica al caso euclideano: ver §35 y §36. ■

Notación: Sea $V \cong \mathbb{C}^n$ espacio hermitiano. Para todo $x \in V$ definimos la norma hermitiana de x por $\|x\| := \sqrt{Q(x)}$, donde $Q(x) = \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}^{\geq 0}$.

Notar que $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (pues Q definida positiva) y para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene: $\|\lambda x\| = \sqrt{Q(\lambda x)} = \sqrt{|\lambda|^2 Q(x)} = |\lambda| \sqrt{Q(x)} = |\lambda| \|x\|$. Más aún:

Teorema (desigualdad de Cauchy-Schwarz): Sea $V \cong \mathbb{C}^n$ espacio hermitiano. Entonces:
$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \ \forall x, y \in V$; con igualdad $\iff$ x e y son colineales.
En part, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todos $x, y \in V$ (desigualdad triangular).

Dem: Sabemos que $Q(x) = \langle x, x \rangle = \operatorname{Re} \langle x, x \rangle$ está asociada a la forma bilineal real $B(x, y) := \operatorname{Re} \langle x, y \rangle$ en $V \cong \mathbb{R}^{2n}$. En part, Cauchy-Schwarz real implica:

$|\mathrm{Re}\langle x,y\rangle| \leq \sqrt{Q(x)}\cdot\sqrt{Q(y)}$. Consideremos $z = \langle x,y\rangle \in \mathbb{C}$ y escribamos $\langle x,y\rangle = r e^{i\theta}$, con $r = |\langle x,y\rangle|$ y $\theta\in\mathbb{R}$. Entonces, dado que $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$:

$\Rightarrow r = e^{-i\theta}\langle x,y\rangle = \langle x, e^{i\theta}y\rangle = \mathrm{Re}\langle x, e^{i\theta}y\rangle$. Por lo tanto:

$$|\langle x,y\rangle| = |\mathrm{Re}\langle x, e^{i\theta}y\rangle| \leq \sqrt{Q(x)}\sqrt{Q(e^{i\theta}y)} = \sqrt{Q(x)}\sqrt{\underbrace{|e^{i\theta}|^2}_{=1}Q(y)} = \sqrt{Q(x)}\cdot\sqrt{Q(y)}.$$

Más aún, Cauchy-Schwarz real implica que la igualdad ocurre $\Leftrightarrow$ x e $e^{i\theta}y$ son $\mathbb{R}$-lin. dep, y en particular serían $\mathbb{C}$-lin. dep. Recíprocamente, si x e y son $\mathbb{C}$-lin. dep. entonces se calcula directamente que la igualdad ocurre. ✓

Finalmente, dado que para todo $z = a+ib\in\mathbb{C}$ se tiene $\mathrm{Re}(z) = a \leq \sqrt{a^2+b^2} = |z|$:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2 + 2\underbrace{\mathrm{Re}\langle x,y\rangle}_{\leq |\langle x,y\rangle|} \underset{CS}{\leq} \|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\| = (\|x\|+\|y\|)^2 \quad ✓ \quad ■$$

Ejemplo principal: La norma hermitiana (canónica) en $\mathbb{C}^n$ está dada por

$$\|(z_1,\dots,z_n)\| = \sqrt{|z_1|^2+\dots+|z_n|^2}.$$

⚠ Importante: En un espacio hermitiano, las fórmulas de polarización son:

① $\mathrm{Re}\langle x,y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$.

② $\mathrm{Im}\langle x,y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+iy\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{4}(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)$.

$\Rightarrow \langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)$ para todos $x,y\in V\cong\mathbb{C}^n$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $V\cong\mathbb{C}^n$ espacio hermitiano y sean $x_1,\dots,x_m\in V$ ortogonales. Probar que:

$$\|x_1+\dots+x_m\|^2 = \|x_1\|^2+\dots+\|x_m\|^2 \quad (\text{"Pitágoras"})$$

Prop: Sea $V\cong\mathbb{C}^n$ espacio hermitiano y sea $u: V\to V$ endomorfismo. Son equivalentes:

① u preserva la norma: $\|u(x)\| = \|x\|$ $\forall x\in V$.

② u preserva el producto escalar: $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x,y\rangle$ $\forall x,y\in V$.

③ Para toda base ortonormal $\mathcal{B}$ de V, la imagen $u(\mathcal{B})$ es una base ortonormal.

④ Existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ de V tq $u(\mathcal{B})$ es una base ortonormal.

⑤ La matriz $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ resp. a una base ortonormal $\mathcal{B}$ de V es una matriz unitaria, i.e., $A^*A = I_n$ $(\Leftrightarrow {}^tA\overline{A} = I_n)$.

En tal caso, u es necesariamente biyectivo (i.e, $u\in GL(V)$), y diremos que u es una isometría de V. En part, el conjunto de isometrías de $V\cong\mathbb{C}^n$ se identifica con el grupo unitario $\mathcal{U}(n)$.

Dem: Idéntica al caso de isometrías de un espacio euclídeano: ver §35. ■

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $A\in M_n(\mathbb{C})$ matriz unitaria. Probar que las columnas de A forman una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$.

Teorema (adjunción): Sea $V \cong \mathbb{C}^n$ espacio hermitiano y sea $u: V \to V$ endomorfismo. Entonces, existe un único endomorfismo adjunto $u^*: V \to V$ verificando

$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle \quad \text{para todos } x, y \in V.$$

Más aún, para toda base ortonormal $\mathcal{B}$ de V se tiene que:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^* \underset{\text{def}}{=} {}^t\overline{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)}.$$

En particular, $(u^*)^* = u$.

Dem: Supongamos que existe $u^*: V \to V$ verificando $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$ $\forall x, y \in V$, y sea $\mathcal{B}$ una base ortonormal de V. Entonces, $H = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\langle\cdot,\cdot\rangle) = I_n$. Sean $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ y $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*)$. Si $X, Y \in \mathbb{C}^n$ son las coord. de $x, y \in V$ respecto a $\mathcal{B}$, entonces: $\langle x, y\rangle = {}^tXH\overline{Y} = {}^tX\overline{Y}$ y luego

$$\langle u(x), y\rangle = {}^t(AX)\overline{Y} = {}^tX\,{}^tA\overline{Y} \underset{\text{Hipótesis}}{=} \langle x, u^*(y)\rangle = {}^tX\,\overline{(BY)} = {}^tX\overline{B}\,\overline{Y} \Rightarrow {}^tA = \overline{B}$$

En otras palabras, $B = {}^t\overline{A} = A^*$. Así, si u^* existe entonces necesariamente se cumple $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^*$ y luego está determinado únicamente por u. Recíprocamente: sea $u^*: V \to V$ el endomorfismo tq $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = A^*$, entonces $\forall x, y \in V$:

$$\langle x, u^*(y)\rangle = {}^tX\,\overline{(A^*Y)} = {}^tX\,\overline{A^*}\,\overline{Y} = {}^tX\,{}^tA\overline{Y} = {}^t(AX)\overline{Y} = \langle u(x), y\rangle \checkmark$$

Finalmente, el hecho que $(A^*)^* = A$ equivale a $(u^*)^* = u$. ■

El siguiente resultado será útil para estudiar endomorfismos diagonalizables:

Lema: Sea $V \cong \mathbb{C}^n$ espacio hermitiano y sea $u: V \to V$ endomorfismo. Entonces, para todo sub-ev $\mathcal{U} \subseteq V$ se tiene que:

$u(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$ (ie, $\mathcal{U}$ es estable por u) $\iff$ $u^*(\mathcal{U}^\perp) \subseteq \mathcal{U}^\perp$ (ie, $\mathcal{U}^\perp$ es estable por u^*).

Dem: Sup. que $u(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$ y sea $y \in \mathcal{U}^\perp$. Veamos que $u^*(y) \in \mathcal{U}^\perp$: Para todo $x \in \mathcal{U}$

$$\langle x, u^*(y)\rangle \underset{\text{def}}{=} \langle \underbrace{u(x)}_{\in\mathcal{U}}, \underbrace{y}_{\in\mathcal{U}^\perp}\rangle = 0 \Rightarrow u^*(y) \in \mathcal{U}^\perp.$$

Recíprocamente, si $u^*(\mathcal{U}^\perp) \subseteq \mathcal{U}^\perp$ entonces el argumento anterior (reemplazando u por u^* y $\mathcal{U}$ por $\mathcal{U}^\perp$) implica $(u^*)^*((\mathcal{U}^\perp)^\perp) \subseteq (\mathcal{U}^\perp)^\perp \iff u(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$. ■

Def: Sea $V \cong \mathbb{C}^n$ espacio hermitiano y sea $u: V \to V$ endomorfismo. Diremos que u es:

1. auto-adjunto (o hermitiano) si $u^* = u$.
2. anti-hermitiano si $u^* = -u$.
3. unitario si $uu^* = \mathrm{Id}_V$ (ie, $u \in GL(V)$ y $u^{-1} = u^*$).

Más generalmente, diremos que u es un endomorfismo normal si conmuta con su adjunto u^*, ie, $uu^* = u^*u$. En part, los endomorfismos normales engloban los tres casos anteriores.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Dar un ejemplo de una matriz $A \in M_2(\mathbb{C})$ que sea normal (ie, $AA^* = A^*A$), pero que no sea hermitiana, ni anti-hermitiana, ni unitaria.

<u>Teorema espectral</u>: Sea $V \cong \mathbb{C}^n$ espacio hermitiano y sea $u: V \to V$ endomorfismo <u>normal</u>. Entonces, u es diagonalizable y los espacios propios asociados a valores propios distintos son ortogonales. En part, existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ de V formada por vectores propios de u. Más aún:

① Si u es <u>hermitiano</u>, sus valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ son <u>reales</u>:
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

② Si u es <u>anti-hermitiano</u>, sus valores propios $i\lambda_1, \dots, i\lambda_n \in i\mathbb{R}$ son <u>imaginarios puros</u>:
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} i\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & i\lambda_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}), \quad \text{con } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

③ Si u es <u>unitario</u>, sus valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ son de módulo 1:
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{C}), \quad \text{con } |\lambda_1| = \dots = |\lambda_n| = 1.$$

<u>Dem</u>: Por inducción en $n = \dim_{\mathbb{C}}(V)$: OK si $n = 1$ ✓ Sup. $n \geq 2$: Dado que $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, $P_u(X)$ posee al menos una raíz $\lambda \in \mathbb{C}$.
Sea V_λ el espacio propio asociado a λ, entonces $u^*(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$. En efecto:
Para todo $x \in V_\lambda$: $u(u^*(x)) \overset{\text{Hip.}}{=} u^*(u(x)) \overset{x \in V_\lambda}{=} u^*(\lambda x) = \lambda u^*(x)$, ie, $u^*(x) \in V_\lambda$.
Luego, el Lema anterior implica que $V_\lambda^\perp$ es estable por u y por u^*. Por otro lado, $V = V_\lambda \oplus V_\lambda^\perp$ y $\dim_{\mathbb{C}}(V_\lambda) > 0 \Rightarrow \dim_{\mathbb{C}}(V_\lambda^\perp) < \dim_{\mathbb{C}}(V)$.
Denotemos $v := u|_{V_\lambda^\perp}: V_\lambda^\perp \to V_\lambda^\perp$ y $v^* := u^*|_{V_\lambda^\perp}: V_\lambda^\perp \to V_\lambda^\perp$. Así, para todos $x, y \in V_\lambda^\perp$ se tiene que $v(x) = u(x)$ y $v^*(x) = u^*(x)$
$\Rightarrow \langle v(x), y \rangle = \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle = \langle x, v^*(y) \rangle$, ie, v^* adjunto de v.
Dado que u y u^* conmutan, v y v^* también, ie, v es un endomorfismo normal de $V_\lambda^\perp$. Luego, la hipótesis de inducción implica que v es diagonalizable y que espacios propios asociados a valores propios distintos son ortogonales. Como $V = V_\lambda \oplus V_\lambda^\perp$, esto último es cierto también para u ✓
En part, considerando bases ortonormales para cada espacio propio de u, obtenemos que existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ de V formada por vectores propios de u.
Finalmente, sea $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ matriz diagonal. Entonces si u es:
① hermitiano $\Rightarrow D^* = \overline{D} = D$, ie, $\lambda_j \in \mathbb{R}$ $\forall j$.
② anti-hermitiano $\Rightarrow D^* = \overline{D} = -D$, ie, $\lambda_j \in i\mathbb{R}$ imaginario puro $\forall j$.
③ unitario $\Rightarrow D^* D = \overline{D} D = I_n$, ie, $|\lambda_j| = 1$ $\forall j$. ■

⚠ <u>Importante</u>: El Teorema espectral también cubre el caso de matrices <u>reales</u> simétricas, anti-simétricas y ortogonales. En efecto, si $A \in M_n(\mathbb{R})$ entonces $A^* = {}^t\overline{A} = {}^tA$ por lo que A es hermitiana (resp. anti-hermitiana, resp. unitaria) si y sólo si es simétrica (resp. anti-simétrica, resp. ortogonal).