§42. Teorema de Sylvester en el caso hermitiano y grupo unitario

Def: Sea $V \cong \mathbb{C}^n$ ev y $h: V \times V \to \mathbb{C}$ forma hermitiana, y sea $Q(x) = h(x,x)$. Decimos que una base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de V es ortogonal respecto a h (o Q) si:

$$h(e_j, e_k) = 0 \text{ para todos } j \neq k \iff H = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}) \text{ diagonal real}$$

$\iff Q(z_1, \dots, z_n) = \lambda_1 |z_1|^2 + \dots + \lambda_n |z_n|^2$, donde $(z_1, \dots, z_n)$ son las coord. resp. a $\mathcal{B}$.

Lema: Toda forma hermitiana admite una base ortogonal.

Dem: Por inducción en $n = \dim_{\mathbb{C}}(V)$: OK si $n=1$ o si $h=0$. Sup $h \neq 0$:
$\Rightarrow \exists\, e_1 \in V$ tq $Q(e_1) \neq 0$. Sea $L = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(e_1)$ y $H = L^{\perp}$. Dado que $h(e_1, e_1) \neq 0$ tenemos que $L \cap L^{\perp} = L \cap H = \{0\} \Rightarrow V = L \oplus H$.
$\underset{\text{Hip. Ind}}{\Rightarrow} \exists$ base $(e_2, \dots, e_n)$ de H tq $h(e_j, e_k) = 0$ para todos $j \neq k$ en $\{2, \dots, n\}$.
Luego, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ base de V ortogonal resp. a h ✓ ∎

Teorema (Sylvester): Sea $V \cong \mathbb{C}^n$ ev y sea $Q: V \to \mathbb{R}$ forma cuadrática hermitiana asociada a la forma hermitiana $h: V \times V \to \mathbb{C}$. Sea $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ una base de V ortogonal resp. a h, y sea $H = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h)$ matriz diagonal real de coef. diagonales $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Entonces:

1. Módulo permutación de índices, podemos suponer que $\lambda_1, \dots, \lambda_r \neq 0$ y que $\lambda_j = 0$ si $j > r$. En part, si $(z_1, \dots, z_n)$ son las coordenadas respecto a $\mathcal{B}$ entonces:
$$Q(z_1, \dots, z_n) = \lambda_1 |z_1|^2 + \dots + \lambda_r |z_r|^2.$$
2. Sea $p \in \mathbb{N}$ (resp. $q \in \mathbb{N}$) el número de índices $j \in \{1, \dots, n\}$ tales que $Q(e_j) > 0$ (resp. $Q(e_j) < 0$). Entonces, el par (p,q) no depende de la base ortogonal escogida y se llama la signatura de Q (o de h). Más aún, $p + q = r = \mathrm{rg}(h)$.
3. $\ker(h) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(e_{r+1}, \dots, e_n)$ está dado por las ecuaciones $z_1 = \dots = z_r = 0$.
4. Más aún, podemos escoger $\mathcal{B}$ tal que
$$H = \left(\begin{array}{c|c|c} I_p & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_q & 0 \\ \hline 0 & 0 & O_{n-r} \end{array}\right)$$

Dem: La demostración es completamente análoga al caso de formas cuádricas reales (ver §31) y queda como Ejercicio ∎

⚠ **Obs importante**: Sea $V \cong \mathbb{C}^n$ ev y $h: V \times V \to \mathbb{C}$ forma hermitiana. Sea $u: V \to V$ endomorfismo. Entonces, la fórmula de polarización implica que:

1. u preserva h, ie, $h(u(x), u(y)) = h(x,y)\ \forall x, y \in V$.
2. u preserva Q, ie, $Q(u(x)) = Q(x)\ \forall x \in V$

son propiedades equivalentes.

Def: Sea $V \cong \mathbb{C}^n$ ev y sea $Q: V \to \mathbb{R}$ forma cuadrática hermitiana. Diremos que un automorfismo $u: V \xrightarrow{\sim} V$ es <u>unitario</u> resp. a Q si u preserva Q (o h).
El sub-grupo de $GL(V)$ dado por

$$\mathcal{U}(Q) := \{ u \in GL(V) \text{ tq } u \text{ es unitario resp. a } Q \} \subseteq GL(V)$$

es llamado el <u>grupo unitario de Q</u>. Más aún, el sub-grupo de $\mathcal{U}(Q)$ dado por

$$S\mathcal{U}(Q) = \{ u \in \mathcal{U}(Q) \text{ tq } \det(u) = 1 \} \subseteq \mathcal{U}(Q)$$

es llamado el <u>grupo especial unitario de Q</u>.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que si Q es <u>no-degenerada</u> y u preserva Q (o h), entonces $u \in GL(V)$ es un automorfismo.

Prop: Sea $V \cong \mathbb{C}^n$ ev y sea $Q: V \to \mathbb{R}$ forma cuadrática hermitiana asociada a h. Sea $\mathcal{B}$ una base de V y sea $H = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h)$. Dado un automorfismo $u: V \xrightarrow{\sim} V$ con $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in GL_n(\mathbb{C})$, tenemos que:

$$u \text{ es } \underline{\text{unitario}} \ (\text{i.e., } u \in \mathcal{U}(Q)) \iff {}^tAH\overline{A} = H \quad (\Leftrightarrow A^*\overline{H}A = \overline{H}).$$

En part, si Q es no-degenerada y $u \in \mathcal{U}(Q)$, entonces $|\det(u)| = 1$.

Dem: Si $X, Y \in \mathbb{C}^n$ son los vectores coord. de $x, y \in V$ resp. a la base $\mathcal{B}$, entonces $h(x,y) = {}^tXH\overline{Y} \Rightarrow h(u(x), u(y)) = {}^t(AX)H(\overline{AY}) = {}^tX({}^tAH\overline{A})Y$, por lo que $u \in \mathcal{U}(Q)$ si y sólo si $H = {}^tAH\overline{A}$ ✓
En part, si h no-degenerada $\Rightarrow \det(H) \neq 0$ y luego la relación $H = {}^tAH\overline{A}$ implica $\cancel{\det(H)} = \det(A)\cancel{\det(H)}\det(\overline{A}) \Rightarrow \det(A)\det(\overline{A}) = |\det(A)|^2 = 1$ ∎

<u>Caso particular importante</u>: El Teorema de Sylvester reduce el estudio de formas cuadráticas hermitianas de $V \cong \mathbb{C}^n$ <u>no-degeneradas</u> de signatura (p,q) a estudiar

$$Q(z_1, \dots, z_n) = |z_1|^2 + \dots + |z_p|^2 - |z_{p+1}|^2 - \dots - |z_{p+q}|^2 \quad (p+q=n).$$

El grupo unitario (resp. especial unitario) correspondiente es denotado $\mathcal{U}(p,q)$ (resp. $S\mathcal{U}(p,q)$). Explícitamente, si consideramos

$$H_{p,q} := \left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & -I_q \end{array} \right) \in GL_n(\mathbb{C})$$

entonces $\mathcal{U}(p,q) \cong \{ A \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ tq } {}^tAH_{p,q}\overline{A} = H_{p,q} \}$ y $S\mathcal{U}(p,q) \cong \{ A \in \mathcal{U}(p,q) \text{ tq } \det(A) = 1 \}$.
Si $(p,q) = (n,0)$ decimos que Q es una forma cuadrática hermitiana <u>definida positiva</u>, y escribimos $\mathcal{U}(n)$ (resp. $S\mathcal{U}(n)$) en lugar de $\mathcal{U}(n,0)$ (resp. $S\mathcal{U}(n,0)$).
Explícitamente:

$$\mathcal{U}(n) \cong \{ A \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ tq } {}^tA\overline{A} = I_n \} = \{ A \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ tq } A^*A = I_n \}.$$