§41. Formas hermitianas

Motivación: Nos gustaría extender la noción de espacios euclideanos a espacios vectoriales complejos $V \cong \mathbb{C}^n$. Si $n=1$, (ie, $V \cong \mathbb{C}$) podemos considerar el módulo de $z \in \mathbb{C}$ dado por $|z|^2 = z\bar{z} = h(z,z)$, donde

$$h : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad , \quad h(z_1, z_2) = z_1 \overline{z_2} \ .$$

Sin embargo, h no es una forma bilineal compleja: h es $\mathbb{C}$-lineal en la 1ª variable, pero h es "anti-lineal" (o lineal conjugada) resp. a la 2ª variable:

$$h(z_1, \lambda z_2 + z_3) = \bar{\lambda}\, h(z_1, z_2) + h(z_1, z_3) \ .$$

Def: Sea $V \cong \mathbb{C}^n$ espacio vectorial complejo. Decimos que una función $h : V \times V \to \mathbb{C}$ es una forma hermitiana si h es:

① lineal en la primera variable: $h(\lambda x + y, z) = \lambda h(x,z) + h(y,z)$
② anti-lineal en la segunda variable: $h(x, \lambda y + z) = \bar{\lambda}\, h(x,y) + h(x,z)$

"sesqui lineal"

③ simétrica hermitiana: $h(x,y) = \overline{h(y,x)}$.

En part. $h(x,x) \in \mathbb{R}$ $\forall x \in V$ y además $h(x,y) = 0 \iff h(y,x) = 0$.

Ejemplo: En $\mathbb{C}^n$, la forma $h : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ dada por

$h((z_1, \ldots, z_n), (w_1, \ldots, w_n)) = z_1 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2} + \ldots + z_n \overline{w_n}$ es hermitiana.

Obs: Tal como en el caso de formas bilineales reales, podemos describir las formas hermitianas matricialmente: Sea $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base de $V \cong \mathbb{C}^n$ y escribamos $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, $y = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n \in V$. Entonces:

$$h(x,y) = h(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n, y) = \sum_{j=1}^n x_j\, h(e_j, y) = \sum_{j=1}^n x_j\, h\Big(e_j, \sum_{k=1}^n y_k e_k\Big) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_j \overline{y_k}\, h(e_j, e_k).$$

Luego, si definimos $h_{jk} := h(e_j, e_k) \in \mathbb{C}$ entonces

$$h(x,y) = \sum_{1 \le j,k \le n} h_{jk}\, x_j \overline{y_k} \ .$$

Más aún, la simetría hermitiana $h(x,y) = \overline{h(y,x)}$ equivale a $h_{jk} = \overline{h_{kj}}$.

Def: Sea $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ una base de $V \cong \mathbb{C}^n$, y sea $h : V \times V \to \mathbb{C}$ forma hermitiana. Definimos la matriz de h resp. a $\mathcal{B}$ mediante

$$H = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h) := (h_{jk})_{1 \le j,k \le n} \quad , \text{ donde } h_{jk} := h(e_j, e_k) \ .$$

Más aún, si $A = (a_{jk}) \in M_{n \times p}(\mathbb{C})$ definimos la matriz adjunta de A por:

$$A^* := {}^t\bar{A} = (\overline{a_{kj}}) \in M_{p \times n}(\mathbb{C}) \ .$$

En part, $H^* = H$ y decimos que H es una matriz hermitiana.

Obs: Si $A \in M_{n \times p}(\mathbb{C})$ y $B \in M_{p \times r}(\mathbb{C})$ entonces $(AB)^* = B^* A^*$.

⚠ <u>Importante</u>: Sea $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ base de $V\cong\mathbb{C}^n$ y sea $h: V\times V\to\mathbb{C}$ forma hermitiana, con $H=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h)=(h_{jk})$. Entonces, para $x=\sum_{j=1}^n x_j e_j$ e $y=\sum_{k=1}^n y_k e_k$:

$$h(x,y)=\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n x_j\overline{y_k}\,h(e_j,e_k)=\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n x_j\,h_{jk}\overline{y_k}={}^tX H\overline{Y},$$

donde $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^n$ vectores coordenadas resp. a $\mathcal{B}$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que si $\mathcal{B}'$ es otra base de V y $P=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ es la matriz de cambio de base, entonces $H'=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(h)={}^tPH\overline{P}$.

<u>Def</u>: Sea $V\cong\mathbb{C}^n$ e.v. y sea $h:V\times V\to\mathbb{C}$ forma hermitiana. La <u>forma cuadrática hermitiana</u> asociada a h es $Q:V\to\mathbb{R}$ dada por

$$Q(x)=h(x,x)\quad\text{para todo } x\in V.$$

En part, para todos $x\in V$ y $\lambda\in\mathbb{C}$ se cumple

$$Q(\lambda x)=h(\lambda x,\lambda x)=\lambda\overline{\lambda}\,h(x,x)=|\lambda|^2Q(x).$$

<u>Ejemplo</u>: En $\mathbb{C}^n$, la forma cuadrática hermitiana

$$Q(z_1,\dots,z_n)=|z_1|^2+\dots+|z_n|^2$$

está asociada a la forma hermitiana h del ejemplo anterior (pág 130).

<u>Obs</u>: Dado que $Q(x)=h(x,x)\in\mathbb{R}$ para todo $x\in V\cong\mathbb{C}^n$, tenemos que Q está también asociada a $B:V\times V\to\mathbb{R}$ dada por $B(x,y):=\mathrm{Re}(h(x,y))$, la cual es bilineal real simétrica pues

$$B(y,x)=\mathrm{Re}\,h(y,x)=\mathrm{Re}\,\overline{h(x,y)}=\mathrm{Re}\,h(x,y)=B(x,y).$$

En part, Q es una forma cuadrática <u>real</u> en $V\cong\mathbb{R}^{2n}$. Más aún, ella verifica $Q(\lambda x)=|\lambda|^2Q(x)$ $\forall x\in V,\ \lambda\in\mathbb{C}$.

<u>Lema</u> (fórmula de polarización): Sea $V\cong\mathbb{C}^n$ y $h:V\times V\to\mathbb{C}$ forma hermitiana. Si Q es la forma cuadrática hermitiana asociada a h, entonces:

1. $\mathrm{Re}\,h(x,y)=\frac{1}{2}\big(Q(x+y)-Q(x)-Q(y)\big)=\frac{1}{4}\big(Q(x+y)-Q(x-y)\big)$
2. $\mathrm{Im}\,h(x,y)=\frac{1}{2}\big(Q(x+iy)-Q(x)-Q(y)\big)=\frac{1}{4}\big(Q(x+iy)-Q(x-iy)\big)$

Luego,
$$h(x,y)=\frac{1}{4}\big(Q(x+y)-Q(x-y)+i\,Q(x+iy)-i\,Q(x-iy)\big)$$
está completamente determinada por Q.

<u>Dem</u>: La fórmula de polarización <u>real</u> aplicada a $B(x,y)=\mathrm{Re}\,h(x,y)$ da ① ✓

Dado que $\forall z\in\mathbb{C}$ se tiene $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Re}(-iz)$ tenemos que

$$\mathrm{Im}\,h(x,y)=\mathrm{Re}(-ih(x,y))=\mathrm{Re}\,h(x,iy),$$

por lo que ② se obtiene de ① reemplazando y por iy, y usando que $Q(iy)=|i|^2Q(y)=Q(y)$ ✓ Finalmente, $h(x,y)=\mathrm{Re}\,h(x,y)+i\,\mathrm{Im}\,h(x,y)$. ∎

Def: Sea $V \cong \mathbb{C}^n$ ev y $h : V \times V \to \mathbb{C}$ forma hermitiana. Dada $\mathcal{B}$ una base de V, definimos el rango de h (o de Q) como $\mathrm{rg}(h) := \mathrm{rg}(H)$, donde H es la matriz de h resp. a $\mathcal{B}$. Decimos que h (o que Q) es no-degenerada si $\mathrm{rg}(h) = \dim_{\mathbb{C}}(V) = n$, ie, $H \in GL_n(\mathbb{C})$ es invertible.

Obs: La fórmula de cambio de base $H' = {}^tP H \overline{P}$ implica $\mathrm{rg}(H) = \mathrm{rg}(H')$.

Ejercicio Determinar la forma hermitiana de $\mathbb{C}^n$ asociada a

$$Q(z_1, \ldots, z_n) = |z_1|^2 + \ldots + |z_p|^2 - |z_{p+1}|^2 - \ldots - |z_{p+q}|^2 \quad , (p+q \leq n)$$

y determinar su rango.

El hecho que $h(x,y) = 0 \iff h(y,x) = 0$ para una forma hermitiana h nos permite definir la noción de ortogonalidad:

Def: Sea $V \cong \mathbb{C}^n$ ev y $h : V \times V \to \mathbb{C}$ forma hermitiana. Diremos que:

① Dos vectores $x, y \in V$ son ortogonales respecto a h (o Q) si $h(x,y) = 0$.

② Si $\mathcal{U} \subseteq V$ sub-conjunto no-vacío, el sub-espacio

$$\mathcal{U}^{\perp} = \mathcal{U}^{\perp_h} = \mathcal{U}^{\perp_Q} := \{ y \in V \text{ tq } \forall x \in \mathcal{U}, h(x,y) = 0 \}$$

es el ortogonal de $\mathcal{U}$.

③ El kernel de h (o de Q) es

$$\ker(h) = \ker(Q) := \{ x \in V \text{ tq } \forall y \in V, h(x,y) = 0 \} = V^{\perp}$$

④ Un vector $x \in V$ es isótropo si $Q(x) = h(x,x) = 0$.

Ejemplo: En $\mathbb{C}^2$, la forma cuadrática hermitiana $Q(z_1, z_2) = |z_1|^2 - |z_2|^2$ está asociada a $h((z_1, z_2), (w_1, w_2)) = z_1 \overline{w_1} - z_2 \overline{w_2}$, cuya matriz resp. a la base canónica de $\mathbb{C}^2$ es $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow h$ es no-degenerada. Notar que $\ker(h) = \{0\} \neq \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \text{ tq } |z_1| = |z_2|\}$ (vectores isótropos).

Teorema: Sea $V \cong \mathbb{C}^n$ ev. y $h : V \times V \to \mathbb{C}$ forma hermitiana. Entonces, para todo $\mathcal{U} \subseteq V$ sub-ev se tiene que:

① $\mathcal{U} \subseteq (\mathcal{U}^{\perp})^{\perp}$ y $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{U}^{\perp}) \geq \dim_{\mathbb{C}}(V) - \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{U})$

② $\ker(h) = \{0\} \iff h$ es no-degenerada.

③ Si h es no-degenerada, entonces

$$\mathcal{U} = (\mathcal{U}^{\perp})^{\perp} \quad \text{y} \quad \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{U}^{\perp}) = \dim_{\mathbb{C}}(V) - \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{U}).$$

④ Si $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^{\perp} = \{0\}$ entonces $V = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^{\perp}$ (sin suponer necesariamente que h es no-degenerada; en cuyo caso la condición $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^{\perp} = \{0\}$ siempre se cumple).

Dem: La prueba es idéntica al caso de formas bilineales simétricas (Ejercicio). ■