Teorema: Sea $V \cong \mathbb{R}^n$ un espacio euclideano y sea $\varphi : V \to V$ función isométrica. Entonces, existe un único vector $a \in V$ y una única isometría (lineal) $u \in O(n)$ tal que
$$\varphi = t_a \circ u \iff \varphi(x) = u(x) + a \quad \text{para todo } x \in V.$$

Dem: Para la unicidad, notamos que si $\varphi = t_a \circ u = t_b \circ v$ con $a, b \in V$, $u, v \in O(n)$
$\Rightarrow \varphi(0) = \underbrace{u(0)}_{=0} + a = \underbrace{v(0)}_{=0} + b \Rightarrow a = b \Rightarrow u = t_{-a} \circ \varphi = v$ ✓

Para la existencia: Sea $a := \varphi(0) \in V$ y consideremos $\psi := t_{-a} \circ \varphi : V \to V$ que cumple $\psi(0) = 0$ y $d(\psi(x), \psi(0)) = d(x, 0) \iff \|\psi(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in V$.
Veamos que $\psi : V \to V$ es lineal (y luego, $\psi = u \in O(n)$): Sea $(e_1, \ldots, e_n)$ base ortonormal de V, entonces para $i \neq j$ tenemos que
$$\|\psi(e_i) - \psi(e_j)\| = d(\psi(e_i), \psi(e_j)) = d(e_i, e_j) = \|e_i - e_j\| = \sqrt{2}.$$
Luego, $\underbrace{\|\psi(e_i) - \psi(e_j)\|^2}_{=2} = \underbrace{\|\psi(e_i)\|^2}_{=1} + \underbrace{\|\psi(e_j)\|^2}_{=1} - 2\langle \psi(e_i), \psi(e_j)\rangle \Rightarrow \langle \psi(e_i), \psi(e_j)\rangle = 0$.
$\Rightarrow (\psi(e_1), \ldots, \psi(e_n))$ es una base ortonormal de V. Sea $x \in V$ arbitrario y escribamos ① $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ usando la base $(e_1, \ldots, e_n)$.
② $\psi(x) = \sum_{j=1}^n y_j \psi(e_j)$ usando la base $(\psi(e_1), \ldots, \psi(e_j))$.
$\Rightarrow d(x, e_k)^2 = \|x - e_k\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, e_k\rangle + \|e_k\|^2 = \|x\|^2 - 2x_k + 1$, y también
$$d(\psi(x), \psi(e_k))^2 = \|\psi(x) - \psi(e_k)\|^2 = \|\psi(x)\|^2 - 2y_k + 1 = \|x\|^2 - 2y_k + 1$$
Dado que $d(\psi(x), \psi(e_k)) = d(x, e_k)$, concluimos que $x_k = y_k$ para todo k
$\Rightarrow \psi\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j \psi(e_j)$ y luego ψ es lineal ✓ ■

§40. Reducción simultánea de formas cuadráticas e hipersuperficies cuádricas

Sea $V \cong \mathbb{R}^n$ un espacio euclideano. Gracias al Teorema de Sylvester (ver §31) sabemos que existe una base ortogonal (de hecho, ortonormal) tal que la forma cuadrática dada por la norma $\|\cdot\|^2$ se reduce a $\|x\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. De manera más general, toda forma cuadrática $Q : V \to \mathbb{R}$ admite una escritura de la forma
$$Q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_p x_p^2 - \lambda_{p+1} x_{p+1}^2 - \ldots - \lambda_{p+q} x_{p+q}^2$$
donde (p, q) es la signatura de Q y $(x_1, \ldots, x_n)$ son las coord. de x resp. a una base ortogonal. El resultado siguiente afirma que podemos reducir simultáneamente $\|\cdot\|^2$ y Q:

Teorema: Sea $V \cong \mathbb{R}^n$ un espacio euclideano y sea $Q : V \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática. Entonces, existe una base ortonormal de V que es ortogonal para Q.

Dem: Denotemos momentáneamente $E := \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ el producto escalar en V, y por $B : V \times V \to \mathbb{R}$ la forma bilineal simétrica asociada a Q.
Construiremos un endomorfismo $u : V \to V$ tal que $B(x, y) = \langle x, u(y)\rangle$ $\forall x, y \in V$:

Si escribimos $B(x,y) = \widehat{B}(y)(x)$ y $\langle x, u(y)\rangle = E(x,u(y)) = \widehat{E}(u(y))(x)$, la igualdad buscada se reescribe como $\widehat{B} = \widehat{E}\circ u$. Dado que $E = \langle\cdot,\cdot\rangle$ es no-degenerada, $\widehat{E} : V \xrightarrow{\sim} V^*$ es un isomorfismo y podemos definir $u := \widehat{E}^{-1}\circ\widehat{B} : V \longrightarrow V$.

$\Rightarrow \langle x, u(y)\rangle = B(x,y) = B(y,x) = \langle y, u(x)\rangle$ y luego $u = u^*$ es simétrico. En part, u es diagonalizable en una base ortonormal $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ de V, ie, $u(e_j) = \lambda_j e_j$ para ciertos $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow B(e_i,e_j) = \langle e_i, u(e_j)\rangle = \lambda_j\langle e_i,e_j\rangle = \lambda_j\,\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i\neq j \\ \lambda_j & \text{si } i=j\end{cases} \quad ✓ \quad \blacksquare$$

Una de las aplicaciones del resultado anterior es el estudio de <u>hipersuperficies cuádricas</u> (o simplemente "<u>cuádricas</u>").

<u>Def</u>: Sea $V \cong \mathbb{R}^n$ espacio euclideano. Sean $Q : V \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática, $f : V \to \mathbb{R}$ forma lineal (ie, $f\in V^*$) y $c\in\mathbb{R}$ una constante. Decimos que el conjunto
$$X = \{x\in V \text{ tal que } Q(x) + f(x) + c = 0\} \subseteq V$$
es una <u>cuádrica</u> en V. Más aún, diremos que la cuádrica $X\subseteq V$ es <u>suave</u> si la forma cuadrática $\widetilde{Q} : V\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por
$$\widetilde{Q}(x,t) = Q(x) + f(x)t + ct^2$$
en $V\times\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{n+1}$ es no-degenerada; en caso contrario, diremos que $X\subseteq V$ es <u>singular</u>.

<u>Obs</u>: Sea $p\in V$ y consideremos la traslación $t_{-p} : V \to V$, $x \mapsto x-p$. Entonces, el conjunto $t_{-p}(X)$ es el conjunto de $x\in V$ tales que:
$$0 = Q(x+p) + f(x+p) + c = Q(x) + 2B(x,p) + f(x) + Q(p) + f(p) + c$$
$$= Q(x) + (2\widehat{B}(p) + f)(x) + (Q(p) + f(p) + c),$$
donde $B : V\times V \to \mathbb{R}$ es la forma bilineal simétrica asociada a Q. Luego, $t_{-p}(X)$ es la cuádrica asociada a la ~~cuadr~~ forma cuadrática Q, a la forma lineal $(2\widehat{B}(p)+f) \in V^*$ y a la constante $c' := Q(p) + f(p) + c$.

<u>Si</u> la forma cuadrática Q es <u>no-degenerada</u> entonces $\widehat{B} : V \xrightarrow{\sim} V^*$ es un isomorfismo.
$\Rightarrow$ Si tomamos $p := -\widehat{B}^{-1}(f/2)$ entonces la ecuación de $t_{-p}(X)$ es de la forma $Q(x) + c' = 0$ (no hay término lineal), y luego $t_{-p}(X)$ es simétrica respecto al origen (ie, $x\in t_{-p}(X) \iff -x\in t_{-p}(X)$).

<u>Def</u>: Sea $V\cong\mathbb{R}^n$ espacio euclideano y sea $X = \{x\in V \text{ tq } Q(x) + f(x) + c = 0\} \subseteq V$ una cuádrica. Diremos que X es una <u>cuádrica centrada</u> si la forma cuadrática $Q : V\to\mathbb{R}$ es no-degenerada. Más aún, diremos que X es una cuádrica <u>centrada en el origen</u> si además se tiene $f = 0$.

<u>Obs</u>: Por la discusión anterior, <u>toda</u> cuádrica centrada puede se trasladada a una cuádrica centrada en el origen. El punto $p = -\widehat{B}^{-1}(f/2)$ es llamado el <u>centro</u> de la cuádrica centrada $Q(x) + f(x) + c = 0$.

Prop: Sea $V \cong \mathbb{R}^n$ espacio euclideano y sea $X = \{x \in V \text{ tq } Q(x) + c = 0\} \subseteq V$ cuádrica centrada en el origen. Entonces, existe una base ortonormal $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ tal que
$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \in X \iff \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 + c = 0 \quad (\text{"Ecuación reducida de } X\text{"}),$$
donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ no-nulos. En part, X suave $\iff c \neq 0$.

Dem: Vimos que existe una base ortonormal $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de V que es ortogonal respecto a la forma cuadrática Q. En part, la matriz $A_{\mathcal{B}}$ de Q está dada por
$$A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$
donde $\det(A_{\mathcal{B}}) = \lambda_1 \cdots \lambda_n \neq 0$, pues Q es no-degenerada. Así, si $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ son las coordenadas de $x \in V$ resp. a $\mathcal{B}$, entonces $Q(x) = Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^2$ ✓

Finalmente, X es una cuádrica suave $\overset{\text{def}}{\iff} \widetilde{Q}(x,t) = Q(x) + ct^2$ es no-degenerada $\iff c \neq 0$ (pues Q es no-degenerada). ■

Terminología: Con la notación anterior:

① Un eje de la cuádrica $X \subseteq V \cong \mathbb{R}^n$ es toda recta $L \subseteq V$ generada por un vector propio asociado a alguno de los valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Un vértice de X es un punto $p \in X$ que está sobre un eje (ie, $p \in X \cap L$, para algún eje L de X).

② Una cuádrica en el plano $V \cong \mathbb{R}^2$ es llamada una cónica.

③ Una cuádrica en el espacio $V \cong \mathbb{R}^3$ es llamada una superficie cuádrica.

Ejemplos: ① La cónica en $V = \mathbb{R}^2$ de ecuación $y = x^2 + 1$ ("parábola") no es una cónica centrada, pues $Q(x,y) = x^2$ es degenerada. Sin embargo, la forma cuadrática $\widetilde{Q}(x,y,t) = x^2 - yt + t^2$ es no-degenerada (Ejercicio, cf. §32) y luego $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } y = x^2 + 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ es una cónica suave.

② Consideremos la cónica C en $\mathbb{R}^2$ dada por la ecuación $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x - 4y = 0$. La matriz de $Q(x,y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2$ es $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 8 \neq 0$. Luego, $C \subseteq \mathbb{R}^2$ es una cónica centrada; sea $p = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ su centro y sea $f(x,y) = 4x - 4y$.

Para determinar $p = (a,b)$ imponemos la anulación del término lineal de
$$3(x+a)^2 + 2(x+a)(y+b) + 3(y+b)^2 + 4(x+a) - 4(y+b) = 0$$
$$\iff 6ax + 2ay + 2bx + 6by + 4x - 4y = 0 \quad \forall x,y \iff \begin{cases} 6a + 2b + 4 = 0 \\ 2a + 6b - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(a,b) = (-1,1)}$$

Sea $C' = t_{-p}(C)$ la traslación de C por $(1,-1)$.
$$\Rightarrow C' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } 3x^2 + 2xy + 3y^2 + \overbrace{Q(-1,1)}^{=4} + \overbrace{f(-1,1)}^{=-8} = 0\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } 3x^2 + 2xy + 3y^2 = 4\}.$$

Calculamos $P_A(X) = \begin{vmatrix} X-3 & -1 \\ -1 & X-3 \end{vmatrix} = (X-3)^2 - 1 = X^2 - 6X + 8 = (X-2)(X-4)$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 4$ valores propios (reales, tal como predice la teoría !).

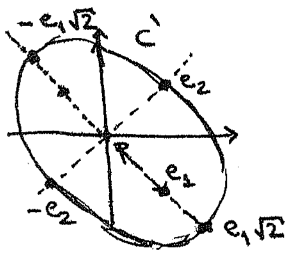
Vectores propios: $V_2 = \ker(A - 2I_2)$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -y$.

$v_1 = (1,-1) \Rightarrow e_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ vector propio unitario.

$V_4 = V_2^{\perp}$: $\langle (x,y),(1,-1)\rangle = x - y = 0 \Rightarrow x = y \rightsquigarrow v_2 = (1,1) \Rightarrow e_2 := \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ vector propio unitario.

Luego, la ecuación reducida de C' en la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ es:

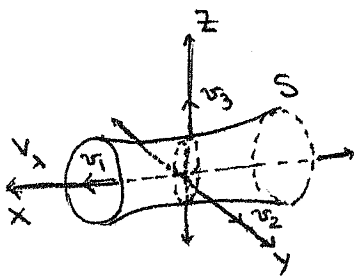
$$2X^2 + 4Y^2 = 4 \quad (\text{"elipse"})$$



Los ejes de C' son las rectas (pasando por $p = (-1,1)$) generadas por e_1 y e_2. Los vértices son $\pm e_1\sqrt{2}$ y $\pm e_2$.

③ Consideremos la superficie cuádrica $S \subseteq \mathbb{R}^3$ dada por $x^2 + 3y^2 + z^2 + 4xz = 3$. La matriz de $Q(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + z^2 + 4xz$ es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, que fue analizada en §36 (pág 112). Sus valores propios son $\lambda = -1$ y $\mu = 3$ (doble). Una base ortonormal de vectores propios es $v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \in V_\lambda$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \in V_\mu$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_\mu$. Luego, la ecuación reducida de S en la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ es:

$$-X^2 + 3Y^2 + 3Z^2 = 3 \quad (\text{"hiperboloide de una hoja"}).$$



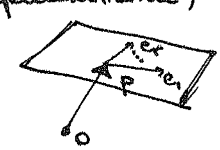
Los ejes de S son las rectas generadas por v_1 (ie, V_λ) y <u>todas</u> las rectas contenidas en $V_\mu = V_\lambda^{\perp}$ (ie, todas las rectas ortogonales a V_λ).

<u>Def</u>: Sea $V \cong \mathbb{R}^n$ espacio vectorial real y $\mathcal{U} \subseteq V$ un sub-ev. Para todo vector $p \in V$, definimos el <u>sub-espacio afín</u> de V <u>dirigido por $\mathcal{U}$ pasando por p</u> como:

$$p + \mathcal{U} = \{x \in V \text{ tal que } x - p \in \mathcal{U}\} = \{p + u,\ u \in \mathcal{U}\},$$

ie, $p + \mathcal{U}$ es la preimagen de $[p]$ en el cociente $V/\mathcal{U}$ (ver §27). <u>Explícitamente</u>, si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_r)$ es una base de $\mathcal{U}$ entonces

$$p + \mathcal{U} = \{p + \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r,\ \text{donde } \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}\}.$$



<u>Ejemplo</u>: ① Sea $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base de $V \cong \mathbb{R}^n$ y sea

$$H = \{x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in V \text{ tal que } a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0\} \text{ hiperplano}.$$

Si $p = \sum_{j=1}^{n} p_j e_j$ vector de coord $(p_1, \ldots, p_n)$, el <u>hiperplano afín</u> dirigido por H pasando por p es $\{x \in V \text{ tq } x - p \in H\} = \{x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in V \text{ tq } a_1(x_1 - p_1) + \ldots + a_n(x_n - p_n) = 0\}$.

② Sea $V \cong \mathbb{R}^n$ espacio euclídeano y sea $X = \{x \in V \text{ tq } Q(x) + f(x) + c = 0\}$ una cuádrica. Si $\mathcal{L} = p + \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(e) = \{p + te,\ t \in \mathbb{R}\}$ es la <u>recta afín</u> dirigida por e pasando por p, entonces la intersección $X \cap \mathcal{L}$ está dada por:

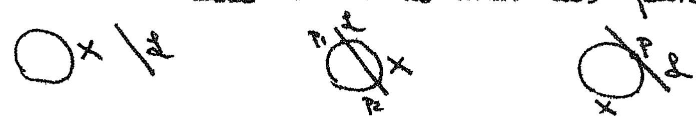
$$0 = Q(p+te) + f(p+te) + c = Q(e)t^2 + (2B(e,p) + f(e))t + (Q(p) + f(p) + c).$$

La ecuación de grado ≤ 2 tiene discriminante $\Delta = (2B(e,p)+f(e))^2 - 4Q(e)(Q(p)+f(p)+c)$.
Luego, ya sea $\mathcal{L} \subseteq X$ o bien $X \cap \mathcal{L}$ consiste en a lo más dos puntos. Si $Q(e) \neq 0$:

1° $\Delta < 0$ y $X \cap \mathcal{L} = \emptyset$

2° $\Delta > 0$ y $X \cap \mathcal{L} = \{p_1, p_2\}$

3° $\Delta = 0$ y $X \cap \mathcal{L} = \{p\}$



En general, incluso si $Q(e) = 0$, diremos que $\mathcal{L}$ es <u>tangente</u> a X si $\Delta = 0$.

<u>Prop</u>: Sea X una cuádrica en el espacio euclideano $V \cong \mathbb{R}^n$, y sea $p \in X$ un punto de la cuádrica (ie, $Q(p) + f(p) + c = 0$). Si consideramos el <u>espacio tangente de X en p</u> dado por

$$T_p X := \{\mathcal{L} \subseteq V \text{ recta } \underline{\text{afín}} \text{ pasando por } p \text{ tal que } \mathcal{L} \text{ tangente a } X\},$$

entonces: ① $T_p X = V$ y X es una cuádrica singular; o bien

② $T_p X$ es un hiperplano afín.

En part, X es una cuádrica suave $\Leftrightarrow$ $T_p X$ es un hiperplano afín $\forall p \in X$.

<u>Dem</u>: Como $p \in X$, la condición $\Delta = 0$ se reduce a $0 = 2B(e,p) + f(e)$, ie, $(2\widehat{B}(p) + f)(e) = 0$. Luego, la unión de las rectas tangentes a X en p es el sub-espacio afín de V dirigido por $H := \ker(2\widehat{B}(p) + f)$ y pasando por p. H es efectivamente un hiperplano a menos que $2\widehat{B}(p) + f = 0$ en V^*. Si escribimos $\widetilde{Q}(x,t) = Q(x) + f(x)t + ct^2$ en $V \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{n+1}$, entonces (<u>Ejercicio</u>):

$$\widetilde{B}((x,t),(y,s)) = B(x,y) + \tfrac{1}{2} f(x) s + \tfrac{1}{2} f(y) t + cts$$ forma bilineal simétrica asociada.

$$\Rightarrow \widetilde{B}((p,1),(y,0)) = B(p,y) + \tfrac{1}{2} f(y) = \tfrac{1}{2}(2\widehat{B}(p) + f)(y).$$

En otras palabras, la condición $2\widehat{B}(p) + f$ equivale a decir que el vector $(p,1) \in V \times \mathbb{R}$ es ortogonal a $V \times \{0\}$ respecto a $\widetilde{Q}$. Dado que $\widetilde{Q}(p,1) = 0$ (pues $p \in X$), esto implica que $(p,1) \in \ker(\widetilde{Q})$ y esto sólo es posible si $\widetilde{Q}$ es degenerada, ie, X es una cuádrica singular. ■

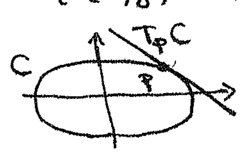
<u>Ejemplo</u>: Si X está centrada en el origen (ie, Q no degenerada y $f = 0$) entonces $T_p X$ está dirigido por $H = \ker(\widehat{B}(p)) = \{x \in V \text{ tq } B(x,p) = 0\} =: p^{\perp_Q}$, ie, el ortogonal de p respecto a Q.

<u>Ejemplo</u>: Sea $C \subseteq \mathbb{R}^2$ elipse dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, centrada en el origen.

$$\Rightarrow Q(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow B((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2}.$$ Luego, si $p = (x_0, y_0) \in C$

$$\Rightarrow L = p^{\perp_Q} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 0\}$$ y por ende:

$$T_p C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \frac{(x-x_0)x_0}{a^2} + \frac{(y-y_0)y_0}{b^2} = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1\}$$



Si $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una superficie cuadrática suave y centrada en el origen, entonces su ecuación puede escribirse (en una base conveniente) como:

① Elipsoide: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \rightsquigarrow$ signatura $(3,0)$

② Hiperboloide de una hoja:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightsquigarrow \text{signatura } (2,1)$$

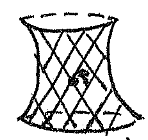
③ Hiperboloide de dos hojas:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightsquigarrow \text{signatura } (1,2)$$

Teorema: Sea $V \cong \mathbb{R}^3$ espacio euclideano y sea $S \subseteq V$ hiperboloide de una hoja. Entonces, S es una superficie reglada: por cada punto $p \in S$ pasan dos rectas (afines) contenidas en S, dadas por la intersección de S y el plano tangente T_pS.

Dem: Como S está centrada en el origen, tenemos que T_pS es un plano afín dirigido por $p^{\perp_Q}$, el ortogonal de p respecto a Q. Escribamos

$$Q(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$$



Sea $p' \in p^{\perp_Q}$ y consideremos $p+p'$ en T_pS. Entonces, $p+p' \in S$ si y sólo si:

$$0 = Q(p+p') - 1 = \underbrace{Q(p)}_{=1} + 2\underbrace{B(p,p')}_{=0} + Q(p') - 1 = Q(p').$$

$\Rightarrow T_pS \cap S$ es la traslación por p del conjunto de vectores isótropos respecto a $Q' := Q|_{p^{\perp_Q}}$. Dado que $Q(p) = 1 > 0$ y la signatura de Q es $(2,1)$, la signatura de Q' en $p^{\perp_Q} \cong \mathbb{R}^2$ es $(1,1)$.

$\underset{\text{Sylvester}}{\Rightarrow}$ $Q'(u,v) = u^2 - v^2 = (u+v)(u-v)$ en una base conveniente de $p^{\perp_Q} \cong \mathbb{R}^2$.

Luego, los vectores isótropos de Q' son la unión de las rectas $u = v$ y $u = -v$ ✓ ■

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $V \cong \mathbb{R}^3$ espacio euclideano y sea $S \subseteq V$ un elipsoide o un hiperboloide de dos hojas. Probar que para todo $p \in S$, la intersección $T_pS \cap S$ es exactamente el punto p. [Indicación: Analizar la signatura de Q'].

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Considerar la superficie cuádrica $S \subseteq \mathbb{R}^3$ dada por:

$$xy + xz + yz + 2y + 1 = 0$$

Determinar una base ortonormal en la cual S admite una ecuación reducida. Determinar dicha ecuación y la naturaleza geométrica de S.