§39. Isometrías en dimensión arbitraria y Teorema de Cartan-Dieudonné

Vimos que toda isometría de $V \cong \mathbb{R}^2$ (resp. $V \cong \mathbb{R}^3$) es el producto de a lo más 2 (resp. 3) reflexiones (ie, simetrías respecto a un hiperplano). Un resultado de Élie Cartan (1869-1951) y Jean Dieudonné (1906-1992) generaliza lo anterior a dimensión (finita) arbitraria.

Lema: Sea $V \cong \mathbb{R}^n$ espacio euclideano y sean $x, y \in V\setminus\{0\}$ no-nulos tales que $x \neq y$ con $\|x\| = \|y\|$. Sea $H := (x-y)^\perp$ hiperplano ortogonal a la recta generada por $x-y$. Entonces, $S_H(x) = y$.

Dem: Buscamos $a \in H$ y $b \in H^\perp = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(x-y)$ tal que $x = a+b$. Dado que $\langle x+y, x-y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0$, tenemos que $a := \frac{x+y}{2} \in H \Rightarrow b = x-a = \frac{x-y}{2}$.

Así, $x = \left(\frac{x+y}{2}\right) + \left(\frac{x-y}{2}\right)$ con $\frac{x+y}{2} \in H$, $\frac{x-y}{2} \in H^\perp \Rightarrow S_H(x) = \frac{x+y}{2} - \left(\frac{x-y}{2}\right) = y$ ■

Teorema (Cartan-Dieudonné): Toda isometría de un espacio euclideano de dimensión $n \geq 2$ es producto de a lo más n reflexiones.

Dem: Por inducción en $n \geq 2$: $n=2$ OK ✓

Sea $u \in O(n)$ una isometría de $V \cong \mathbb{R}^n$. Si $u = \mathrm{Id}_V$ entonces $\mathrm{Id}_V = S^2 = S\circ S$ para toda reflexión $S \in O(n)$ ✓ Si $u \neq \mathrm{Id}_V$ entonces $\exists x \in V\setminus\{0\}$ tq $u(x) \neq x$.

Dado que $u \in O(n)$, $\|x\| = \|u(x)\|$ tienen la misma norma $\underset{\text{Lema}}{\Rightarrow} \exists S$ reflexión tq $S(x) = u(x) \Rightarrow S^2(x) = x = (S\circ u)(x)$. En part, $S\circ u \in O(n)$ deja invariante la recta generada por x y el hiperplano ortogonal $H := x^\perp$.

Hipótesis de inducción $\Rightarrow (S\circ u)|_H$ se escribe como $S_{H_1'}\circ\cdots\circ S_{H_m'}$, donde $m \leq n-1$ y $H_1', \ldots, H_m'$ son hiperplanos en H (ie, $\dim_{\mathbb{R}} H_j' = n-2$). Para $j \in \{1,\ldots,m\}$ definimos $H_j := \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(H_j', x)$ hiperplano en V generado por H_j' y por x.

$\Rightarrow$ El producto $S_{H_1}\circ\cdots\circ S_{H_m}$ coincide con $S\circ u$ al restringirse a H, y al restringirse a $L = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(x)$ (pues $(S_{H_1}\circ\cdots\circ S_{H_m})|_L = \mathrm{Id}_L$).

Dado que $V = H \oplus L$ concluimos que $S_{H_1}\circ\cdots\circ S_{H_m} = S\circ u$ en todo V

$\Rightarrow u = S^{-1}\circ S_{H_1}\circ\cdots\circ S_{H_m} = S\circ S_{H_1}\circ\cdots\circ S_{H_m}$ ■

Def: Sea $V \cong \mathbb{R}^n$ un espacio euclideano. Una función (no necesariamente lineal) $\varphi : V \to V$ es una función isométrica si para todos $x, y \in V$ se tiene

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x,y) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|x-y\|.$$

Ejemplo: ① Toda isometría (lineal) $u \in O(n)$ es una función isométrica.

② Sea $a \in V$ vector fijo. La traslación en a, dada por

$$t_a : V \to V, \quad x \mapsto t_a(x) = x+a$$

es una función isométrica (no lineal si $a \neq 0$).

Teorema: Sea $V \cong \mathbb{R}^n$ un espacio euclideano y sea $\varphi : V \to V$ función isométrica. Entonces, existe un único vector $a \in V$ y una única isometría (lineal) $u \in O(n)$ tal que
$$\varphi = t_a \circ u \iff \varphi(x) = u(x) + a \quad \text{para todo } x \in V.$$

Dem: Para la unicidad, notamos que si $\varphi = t_a \circ u = t_b \circ v$ con $a, b \in V$, $u, v \in O(n)$
$$\Rightarrow \varphi(0) = \underbrace{u(0)}_{=0} + a = \underbrace{v(0)}_{=0} + b \Rightarrow a = b \Rightarrow u = t_{-a} \circ \varphi = v \ \checkmark$$

Para la existencia: Sea $a := \varphi(0) \in V$ y consideremos $\psi := t_{-a} \circ \varphi : V \to V$ que cumple $\psi(0) = 0$ y $d(\psi(x), \psi(0)) = d(x, 0) \iff \|\psi(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in V$.
Veamos que $\psi : V \to V$ es lineal (y luego, $\psi = u \in O(n)$): Sea $(e_1, \dots, e_n)$ base ortonormal de V, entonces para $i \neq j$ tenemos que
$$\|\psi(e_i) - \psi(e_j)\| = d(\psi(e_i), \psi(e_j)) = d(e_i, e_j) = \|e_i - e_j\| = \sqrt{2}.$$
Luego, $\underbrace{\|\psi(e_i) - \psi(e_j)\|^2}_{=2} = \underbrace{\|\psi(e_i)\|^2}_{=1} + \underbrace{\|\psi(e_j)\|^2}_{=1} - 2\langle \psi(e_i), \psi(e_j)\rangle \Rightarrow \langle \psi(e_i), \psi(e_j)\rangle = 0$.
$\Rightarrow (\psi(e_1), \dots, \psi(e_n))$ es una base ortonormal de V. Sea $x \in V$ arbitrario y escribamos ① $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ usando la base $(e_1, \dots, e_n)$.
② $\psi(x) = \sum_{j=1}^n y_j \psi(e_j)$ usando la base $(\psi(e_1), \dots, \psi(e_j))$.
$$\Rightarrow d(x, e_k)^2 = \|x - e_k\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, e_k\rangle + \|e_k\|^2 = \|x\|^2 - 2x_k + 1, \text{ y también}$$
$$d(\psi(x), \psi(e_k))^2 = \|\psi(x) - \psi(e_k)\|^2 = \|\psi(x)\|^2 - 2y_k + 1 = \|x\|^2 - 2y_k + 1$$
Dado que $d(\psi(x), \psi(e_k)) = d(x, e_k)$, concluimos que $x_k = y_k$ para todo k
$$\Rightarrow \psi\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j \psi(e_j) \quad \text{y luego } \psi \text{ es lineal} \ \checkmark \ \blacksquare$$

§40. Reducción simultánea de formas cuadráticas e hipersuperficies cuádricas

Sea $V \cong \mathbb{R}^n$ un espacio euclideano. Gracias al Teorema de Sylvester (ver §31) sabemos que existe una base ortogonal (de hecho, ortonormal) tal que la forma cuadrática dada por la norma $\|\cdot\|^2$ se reduce a $\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$. De manera más general, toda forma cuadrática $Q : V \to \mathbb{R}$ admite una escritura de la forma
$$Q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_p x_p^2 - \lambda_{p+1} x_{p+1}^2 - \dots - \lambda_{p+q} x_{p+q}^2$$
donde (p, q) es la signatura de Q y $(x_1, \dots, x_n)$ son las coord. de x resp. a una base ortogonal. El resultado siguiente afirma que podemos reducir simultáneamente $\|\cdot\|^2$ y Q:

Teorema: Sea $V \cong \mathbb{R}^n$ un espacio euclideano y sea $Q : V \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática. Entonces, existe una base ortonormal de V que es ortogonal para Q.

Dem: Denotemos momentáneamente $E := \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ el producto escalar en V, y por $B : V \times V \to \mathbb{R}$ la forma bilineal simétrica asociada a Q.
Construiremos un endomorfismo $u : V \to V$ tal que $B(x, y) = \langle x, u(y)\rangle \ \forall x, y \in V$: