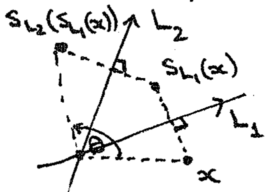
Dem: Sean e_1 y e_2 vectores directores unitarios. Dado que $\det(s_{L_2}\circ s_{L_1}) = (-1)^2 = 1$, sabemos que $s_{L_2}\circ s_{L_1} = r_\theta \in SO(2)$ es una rotación. Basta calcular θ:



Si $x = e_1$: $\theta = \measuredangle(e_1, s_{L_2}(s_{L_1}(e_1))) = \measuredangle(e_1, s_{L_2}(e_1))$

$= \measuredangle(e_1,e_2) + \measuredangle(e_2, s_{L_2}(e_1)) = \measuredangle(e_1,e_2) + \measuredangle(s_{L_2}(e_2), s_{L_2}(e_1))$

$\underset{\text{Ejercicio anterior}}{=} \measuredangle(e_1,e_2) - \measuredangle(e_2,e_1) = 2\measuredangle(e_1,e_2)$ ■

§38. Isometrías del espacio

En toda esta sección $V \cong \mathbb{R}^3$ será un espacio euclídeano de dimensión 3. Para describir los elementos de $O(3)$ usaremos argumentos más geométricos.

Teorema: Sea $V \cong \mathbb{R}^3$ un espacio euclídeano y sea $u: V \xrightarrow{\sim} V$ una isometría de V (ie, $u \in O(3)$). Entonces, existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ de V tal que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ es de la forma

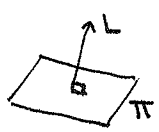
$$A = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

donde $a^2+b^2 = 1$ y $\delta = \pm 1$ es el determinante de u.

Dem: El polinomio característico $P_u(X) \in \mathbb{R}[X]$ es de grado 3, por lo que posee necesariamente una raíz real $\lambda \in \mathbb{R}$ (por continuidad). Sea x un vector propio asociado al valor propio λ, entonces:

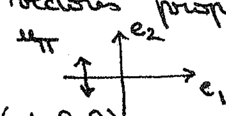
$$\|x\| \underset{u\in O(3)}{=} \|u(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| \underset{x\neq 0}{\Longrightarrow} |\lambda| = 1, \text{ ie, } \lambda = \pm 1.$$

Caso 1 ($\lambda = 1$): En este caso, existe $x \neq 0$ (que podemos suponer unitario, ie, $\|x\|=1$) tal que $u(x) = x$. Sea $L = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(x)$ recta, estable por u: $u(L) = L$.
Sea $\Pi := L^\perp$ plano ortogonal a L, estable por u pues $u(L^\perp) = u(L)^\perp$ ✓



$\Pi \cong \mathbb{R}^2$ es un plano euclídeano y podemos aplicar los resultados de la sección anterior. Sea $u_\Pi := u|_\Pi : \Pi \xrightarrow{\sim} \Pi$ isometría.
Notar que $\det(u) = \lambda \det(u_\Pi) = \det(u_\Pi)$ en este caso!

$\boxed{\text{Sub caso (a)}}$: Si $\delta = \det(u) = \det(u_\Pi) = -1$ entonces $u_\Pi \in O(2)$ es una reflexión.
En part, $\exists\, \mathcal{B}'$ base ortonormal de $\Pi \cong \mathbb{R}^2$ formada por vectores propios de u_Π
$\Rightarrow B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u_\Pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, con $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$



$\Pi \cong \mathbb{R}^2$

Si $\mathcal{B} := (e_2, e_1, x)$ base ortonormal $\Rightarrow A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

$\boxed{\text{Subcaso (b)}}$: Si $\delta = +1$ entonces $u_\Pi \in SO(2)$ es una rotación. En part, $\exists\, \mathcal{B}'$ base ortonormal de $\Pi \cong \mathbb{R}^2$ tq $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u_\Pi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ con $a^2+b^2 = 1$.
Si $\mathcal{B} := (x, e_1, e_2)$ base ortonormal $\Rightarrow A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$ con $a^2+b^2 = 1$ ✓

Caso 2 ($\lambda = -1$): Considerar $-u \in O(3)$ que posee a 1 como valor propio y cumple $\det(-u) = (-1)^3 \det(u) = -\delta$. Luego, basta aplicar el Caso 1 a $-u$ ✓ ■

<u>Obs</u>: Notamos que $\mathrm{tr}(u) = 2a + \delta$, por lo que $\delta = \det(u)$ y $a = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(u) - \det(u))$ están definidos intrínsecamente por $u: V \to V$. Sin embargo, b está determinado por $a^2 + b^2 = 1$ (hay que <u>escoger</u> un signo).

<u>Prop</u>: Sea $V \cong \mathbb{R}^3$ espacio euclideano y sea $u \in SO(3)$ isometría <u>directa</u> (ie, $\det(u) = 1$). Entonces, $-1 \leq \mathrm{tr}(u) \leq 3$ y además $\mathrm{tr}(u) = 3 \Leftrightarrow u = \mathrm{Id}_V$. Si $\mathrm{tr}(u) < 3$ entonces existe una única recta $L \subseteq V$ invariante por u (ie, $u(L) = L$) tq la restricción de u al plano ortogonal $\Pi := L^\perp$ es una rotación (ie, $u|_\Pi \in SO(2)$). Decimos en ese caso que u es una <u>rotación de eje L</u>.

<u>Dem</u>: Sea $\mathcal{B}$ base ortonormal de V tq $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$, con $\delta = 1$ y $a^2 + b^2 = 1$ ($\Rightarrow -1 \leq a \leq 1$). Luego:

$$\mathrm{tr}(u) = 1 + 2a \Rightarrow 1 - 2 = -1 \leq \mathrm{tr}(u) \leq 3 = 1 + 2 \quad \text{y} \quad \mathrm{tr}(u) = 3 \Leftrightarrow a = 1 \ (\Rightarrow b = 0)$$
$$\Leftrightarrow u = \mathrm{Id}_V \ \checkmark$$

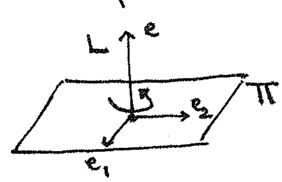
Notamos que $P_u(X) = (X - \delta)(X^2 - 2aX + 1) = (X-1)(X^2 - (\mathrm{tr}(u) - 1)X + 1)$, y que $\lambda = 1$ es raíz de $X^2 - (\mathrm{tr}(u) - 1)X + 1 \Leftrightarrow 1 - \mathrm{tr}(u) + 1 + 1 = 3 - \mathrm{tr}(u) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{tr}(u) = 3$.

Luego, si $\mathrm{tr}(u) < 3$, entonces $V_1 = \ker(u - \mathrm{Id}_V) =: L$ es una tq $u|_L = \mathrm{Id}_L$.

Sea $\Pi := L^\perp$ plano ortogonal. Entonces $u(\Pi) = \Pi$ y $\det(u) = \det(u|_\Pi) = 1$, por lo que $u|_\Pi : \Pi \xrightarrow{\sim} \Pi$ es una rotación del plano euclideano $\Pi \cong \mathbb{R}^2$ ■

<u>Obs</u>: Si <u>orientamos</u> $\Pi \cong \mathbb{R}^2$ entonces $u|_\Pi = r_\theta$ para un único $\theta \in \mathbb{R}$ (mod $2\pi\mathbb{Z}$) que verifica $\mathrm{tr}(u) = 2\cos(\theta) + 1$.

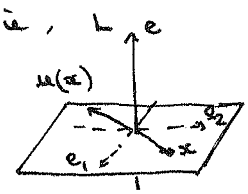
⚠ <u>Atención</u>: No basta con orientar $V \cong \mathbb{R}^3$ para determinar θ módulo $2\pi\mathbb{Z}$. <u>Además</u>, hay que orientar el plano $\Pi = L^\perp$.



<u>Convención</u>: Una vez <u>fijada</u> una orientación de $V \cong \mathbb{R}^3$, diremos que una base (e_1, e_2) de Π es <u>directa</u> si la base $\mathcal{B} = (e, e_1, e_2)$ de V es directa, donde $e \neq 0$ es un vector director de L. Así, orientar L eligiendo un vector no-nulo ("arriba" o "abajo") induce una orientación natural de Π ("anti-horario" u "horario"): esto último es la "regla de la mano derecha".

<u>Ejemplo importante</u>: Sea $u \in SO(3)$ rotación de ángulo π, ie,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

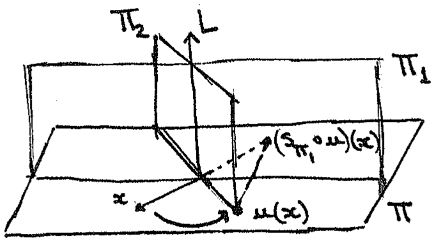


y luego u es una <u>simetría respecto a una recta L</u>, y está caracterizada por las igualdades $\det(u) = 1$ y $\mathrm{tr}(u) = -1$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que $SO(3)$ <u>no</u> es conmutativo. [Indicación: Considerar $V = \mathbb{R}^3$ y r_1 (resp. r_2) la rotación del plano XY (resp. YZ) en $\frac{\pi}{2}$ y probar que $r_1 r_2 \neq r_2 r_1$].

Corolario: Sea $V \cong \mathbb{R}^3$ un espacio euclideano y sea $u \in SO(3)$ una isometría <u>directa</u>. Entonces, u es el producto de dos reflexiones.

Dem: Si $u = Id_V$ entonces $Id_V = s \circ s = s^2$ para toda reflexión $s : V \to V$ ✓ Si $u \neq Id_V$ entonces u es una <u>rotación</u> de eje L, y la restricción a $\Pi = L^\perp$ es una rotación del plano euclideano $\Pi \cong \mathbb{R}^2$, por lo que $u/_{\Pi}$ es producto de dos reflexiones (ver pág. 113). Explícitamente:



Sea Π_1 un plano conteniendo L, entonces $s_{\Pi_1} \circ u$ es una reflexión respecto a un plano Π_2 conteniendo L.
$\Rightarrow s_{\Pi_1} \circ u = s_{\Pi_2} \Rightarrow u = s_{\Pi_1}^{-1} \circ s_{\Pi_2} = s_{\Pi_1} \circ s_{\Pi_2}$ ■

Prop: Sea $V \cong \mathbb{R}^3$ un espacio euclideano y sea $u \in O(3)$ una isometría <u>indirecta</u> (ie, $\det(u) = \delta = -1$). Entonces, existe una recta $L \subseteq V$ invariante por u (ie, $u(L) = L$) tal que $u = r_L \circ s_\Pi = s_\Pi \circ r_L$ es el producto conmutativo de una rotación $r_L \in SO(3)$ de eje L y una reflexión s_Π respecto al plano ortogonal $\Pi = L^\perp$. En particular, u es producto de tres reflexiones.

Dem: Sea $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ base ortonormal de V tal que $A = Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$ con $a^2 + b^2 = 1$. Notar que:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}}_{R} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{S} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}}_{R}.$$

Si $L := Vect_{\mathbb{R}}(e_1)$ entonces $\Pi = Vect_{\mathbb{R}}(e_2, e_3)$ y $R = Mat_{\mathcal{B}}(r_L)$ es una rotación de eje L, mientras que $S = Mat_{\mathcal{B}}(s_\Pi)$ es la reflexión respecto a Π ✓
Vimos en el corolario anterior que r_L es el producto de dos reflexiones ■

⚠ Vimos en §37 que todo elemento de $O(2)$ es producto de a lo más 2 reflexiones, y acabamos de probar que todo elemento de $O(3)$ es producto de a lo más 3 reflexiones. Veremos que todo elemento de $O(n)$ es producto de a lo más n reflexiones!

Terminemos esta sección dando una definición formal del "<u>producto cruz</u>" (o "producto vectorial") estudiado en 1er año, y que será útil para determinar ángulos de rotación de elementos de $SO(3)$:

Recuerdo: Sea $V \cong \mathbb{R}^3$ un espacio euclideano <u>orientado</u> y sea $\mathcal{B}$ una base ortonormal directa de V. La aplicación lineal $f : V \to \mathbb{R}$ dada por

$$z \longmapsto f(z) = \det_{\mathcal{B}}(x, y, z),$$

donde $x, y \in V$ son dos vectores <u>fijos</u>, no depende de la base <u>ortonormal</u> <u>directa</u>, pues si $\mathcal{B}'$ es otra base ortonormal directa, entonces $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = 1$.

Luego, si escribimos $B = \langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ producto escalar, entonces $\widehat{B} : V \xrightarrow{\sim} V^*$ dada por $\widehat{B}(y) = \langle \cdot , y \rangle = \langle y , \cdot \rangle$ es un isomorfismo. En part, dados $x, y \in V$, existe un único vector en V asociado a f : $\widehat{B}^{-1}(f)$.

Def: Sea $V \cong \mathbb{R}^3$ un espacio euclideano orientado, y sean $x, y \in V$ dos vectores. El producto cruz entre x e y es el único vector $x \times y \in V$ tal que

$$\det_{\mathcal{B}}(x, y, z) = \langle x \times y , z \rangle \quad \text{para todo } z \in V,$$

donde $\mathcal{B}$ es cualquier base ortonormal directa de V.

Prop: Sea $V \cong \mathbb{R}^3$ un espacio euclideano orientado. Entonces:

① La aplicación $\begin{array}{rcl} V \times V & \longrightarrow & V \\ (x, y) & \longmapsto & x \times y \end{array}$ es bilineal alternada.

② El vector $x \times y$ es ortogonal a x e y; además $x \times y = 0 \Leftrightarrow x$ e y son l.d. (ie, colineales). Si x e y no son colineales, entonces $(x, y, x \times y)$ es una base directa de V.

③ Si $\theta = \theta(x, y)$ es el ángulo no-orientado entre x e y, entonces

$$\| x \times y \| = \|x\| \|y\| \, |\sin \theta| .$$

Dem: ① Para todo $z \in V$ se tiene que

$$\langle y \times x , z \rangle \underset{\text{def}}{=} \det_{\mathcal{B}}(y, x, z) = -\det_{\mathcal{B}}(x, y, z) = -\langle x \times y , z \rangle \Rightarrow y \times x = -x \times y .$$

② El cálculo anterior implica que $\langle x \times y , x \rangle = \det_{\mathcal{B}}(x, y, x) = 0$ y que $\langle x \times y , y \rangle = \det_{\mathcal{B}}(x, y, y) = 0$, por lo que $x \times y$ es ortogonal a x e y.
Si x e y no son colineales, podemos completar (x, y) en una base (x, y, z) de V y luego $\langle x \times y , z \rangle = \det_{\mathcal{B}}(x, y, z) \neq 0 \Rightarrow x \times y \neq 0$. Por otro lado,

$$\| x \times y \|^2 = \langle x \times y , x \times y \rangle \underset{\text{def}}{=} \det_{\mathcal{B}}(x, y, x \times y)$$

por lo que si x e y son colineales entonces $\|x \times y\|^2 = 0 \Rightarrow x \times y = 0$, y además si x e y no son colineales $\det_{\mathcal{B}}(x, y, x \times y) > 0$ y luego la base $(x, y, x \times y)$ es directa.

③ Supongamos primero que x e y son unitarios y ortogonales (ie, $\|x\| = \|y\| = 1$ y $\langle x, y \rangle = 0$) y completemos (x, y) en una base ortonormal directa $\mathcal{B} = (x, y, e)$.
Luego, para todo $z \in V$ se tiene $z = \langle z, x \rangle x + \langle z, y \rangle y + \langle z, e \rangle e$

$\Rightarrow \det_{\mathcal{B}}(x, y, z) = \langle z, e \rangle \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(x, y, e)}_{=1} = \langle e, z \rangle \Rightarrow e = x \times y$. y además $\|e\|^2 = \|x \times y\|^2 = 1$ ✓ Notar que $\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \theta(x, y) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |\sin(\theta)| = 1$, por lo que $1 = \|x \times y\| = \|x\| \|y\| \, |\sin \theta|$ en este caso ✓

Si x e y son solamente ortogonales, la bilinealidad del producto cruz implica $1 = \left\| \frac{x}{\|x\|} \times \frac{y}{\|y\|} \right\| \Leftrightarrow \|x \times y\| = \|x\| \|y\|$ ✓

Si x e y son solamente unitarios, entonces x y $x\langle x, y \rangle - y$ son ortogonales.

Entonces, $\|x\times y\| \underset{x\times x=0}{=} \|x\times(x\langle x,y\rangle - y)\| \underset{\text{caso anterior}}{=} \|x\|\,\|x\langle x,y\rangle - y\| = \|x\langle x,y\rangle - y\|$, mientras que $\|x\langle x,y\rangle - y\|^2 = \langle x,y\rangle^2 - 2\langle x,y\rangle^2 + \underbrace{\|y\|^2}_{=1} = 1-\langle x,y\rangle^2 = 1-\cos^2(\theta) = \sin^2(\theta)$

$\Rightarrow \|x\times y\| = |\sin\theta|$ en este caso ✓ Finalmente, el caso general se deduce por bilinealidad del producto cruz: $\left\|\frac{x}{\|x\|}\times\frac{y}{\|y\|}\right\| = |\sin\theta| \iff \|x\times y\| = \|x\|\|y\||\sin\theta|$ ■

Obs importante: ① Sea $V\cong\mathbb{R}^3$ espacio euclideano orientado y sea $\mathcal{B}$ una base ortonormal directa. Si $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ (resp. $(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$) son las coordenadas de $x\in V$ (resp. $y\in V$) respecto a $\mathcal{B}$, entonces:

Las coordenadas de $x\times y\in V$ son dadas por los determinantes

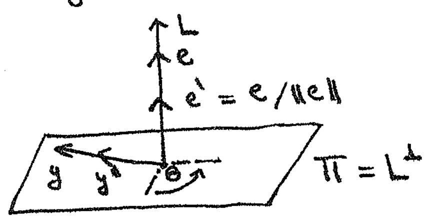
$$\left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)\in\mathbb{R}^3$$

En efecto, ellos son los coeficientes de la forma lineal

$$\det_{\mathcal{B}}(x,y,z) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

obtenida al desarrollar la última columna.

② Sea $V\cong\mathbb{R}^3$ espacio euclideano orientado y sea $u = r_L \in SO(3)$ una rotación de eje L. Orientamos la recta L al escoger un vector director $e\in L$ no-nulo.



Luego, el plano $\Pi = L^\perp$ posee una orientación "inducida" y $u|_\Pi = r_\theta \in SO(2)$ para un único ángulo $\theta\in\,]-\pi,\pi]$

Sea $y\in V\setminus\{0\}$ vector no nulo ortogonal a L, y sean $e' := \dfrac{e}{\|e\|}$ e $y' := \dfrac{y}{\|y\|}$.

$\Rightarrow \mathcal{B}' = (e', y', e'\times y')$ base ortonormal directa de V. Más aún,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \langle u(y'),y'\rangle & \langle u(e'\times y'),y'\rangle \\ 0 & \langle u(y'),e'\times y'\rangle & \langle u(e'\times y'),e'\times y'\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sin(\theta) = \langle u(y'), e'\times y'\rangle = \langle e'\times y', u(y')\rangle \underset{\text{def}}{=} \det_{\mathcal{B}}(e', y', u(y')) = \frac{1}{\|y\|^2\|e\|}\det_{\mathcal{B}}(e,y,u(y))$$

Ahora, si $x\in V\setminus\{0\}$ es cualquier vector no colineal a e, entonces $y := x - \langle x,e'\rangle e'$ es no-nulo y ortogonal a e. Luego, $\sin(\theta)$ tiene el mismo signo que

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{B}}(e,y,u(y)) &= \det_{\mathcal{B}}(e, x-\langle x,e'\rangle e', u(x-\langle x,e'\rangle e')) \\ &= \det_{\mathcal{B}}(e, x, u(x) - \langle x,e'\rangle \underbrace{u(e')}_{=e'}) = \det_{\mathcal{B}}(e,x,u(x)).\end{aligned}$$

Conclusión: Si $u = r_{L,\theta}\in SO(3)$ es la rotación de eje L, orientado por un vector director e, de ángulo $\theta\in\,]-\pi,\pi]$. Entonces:

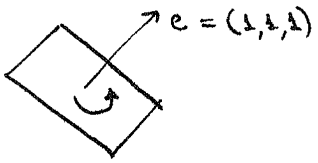
ⓐ $\mathrm{tr}(u) = 2\cos(\theta)+1$

ⓑ $\sin(\theta)$ tiene el mismo signo de $\det_{\mathcal{B}}(e,x,u(x))$, donde x es cualquier vector fuera del eje L y $\mathcal{B}$ es cualquier base directa.

<u>Ejemplos</u>: ① Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Notamos que A es una matriz <u>ortogonal</u> pues ${}^tAA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ y además $\det(A) = 1$. Luego, $A \in SO(3)$ y es la matriz (resp. a la base canónica) de una rotación $r_{L,\theta}$ cuyo eje L está generado por un vector propio asociado al valor propio $\lambda = 1$.

Calculamos $L = V_1 = \ker(A - I_3)$: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z-x \\ x-y \\ y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y = z$.

Consideramos $e = (1,1,1)$ como generador, que usamos para <u>orientar</u> L.



Para calcular θ, notamos que:

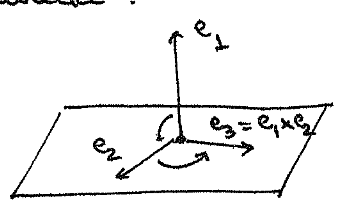
(a) $\operatorname{tr}(A) = 0 = 2\cos(\theta) + 1 \Rightarrow \cos(\theta) = -\frac{1}{2}$, y luego $\theta = \frac{2\pi}{3}$ o $\theta = -\frac{2\pi}{3}$.

(b) El vector $x = (1,0,0)$ <u>no</u> es colineal a e y cumple $r_L(x) = (0,1,0) \Rightarrow \det_{\mathcal{B}}(e, x, r_L(x)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 > 0$

$\Rightarrow \sin(\theta) > 0$ y luego $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

② Consideremos la rotación r de $V = \mathbb{R}^3$ de eje generado <u>y orientado</u> por el vector $e_1 = (36, -48, 25)$ y de ángulo $\theta = \pi/2$. Si $L = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}(e_1)$, el plano $\Pi = L^\perp$ está dado por la ecuación $36x - 48y + 25z = 0$. En part, el vector $e_2 = (4,3,0) \in \Pi$. Sea $e_3 := e_1 \times e_2 = (-75, 100, 300)$ producto cruz.

$\Rightarrow (e_1, e_2, e_3)$ base directa.



"Regla de la mano derecha"

Al normalizar, obtenemos:

$e_1' = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \left(\frac{36}{65}, \frac{-48}{65}, \frac{25}{65}\right)$; $e_2' = \frac{e_2}{\|e_2\|} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$; $e_3' = \frac{e_3}{\|e_3\|} = \left(\frac{-3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}\right)$

y luego $\mathcal{B} = (e_1', e_2', e_3')$ base ortonormal directa. En esta base se tiene que:

$A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. La matriz de cambio de base a la base canónica

es $P = \begin{pmatrix} 36/65 & 4/5 & -3/13 \\ -48/65 & 3/5 & 4/13 \\ 25/65 & 0 & 12/13 \end{pmatrix} = \frac{1}{65}\begin{pmatrix} 36 & 52 & -15 \\ -48 & 39 & 20 \\ 25 & 0 & 60 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow PAP^{-1} = PA\,{}^tP = \frac{1}{4225}\begin{pmatrix} 1296 & -3353 & -2220 \\ -103 & 2304 & -3540 \\ 4020 & 1140 & 625 \end{pmatrix}$ matriz de r en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Notar que la traza es $\frac{1}{4225}(1296 + 2304 + 625) = 1 = 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ✓