§37. Isometrías del plano y orientación

En toda esta sección, a menos que se diga lo contrario, $V \cong \mathbb{R}^2$ será un espacio euclídeo de dimensión 2, ie, un plano. Estudiaremos las isometrías de V (ie, elementos de $O(2)$) mirando sus matrices respecto a una base ortonormal:

Sea $V \cong \mathbb{R}^2$ un plano euclídeo y sea $\mathcal{B}$ una base ortonormal de V. Consideremos una isometría $u : V \xrightarrow{\sim} V$ (ie, $u \in O(2)$) y sea $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Si escribimos

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in Gl_2(\mathbb{R})$$

entonces sabemos que $\delta := \det(A) = \pm 1$ y que $A{}^tA = I_2$, o bien:

$$A = {}^tA^{-1} = \frac{1}{\delta}{}^t\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

lo cual equivale a: $d = \delta a$, $c = -\delta b$, por lo que $\delta = ad - bc = \delta a^2 + \delta b^2$

Prop: Sea $A \in Gl_2(\mathbb{R})$ la matriz de una isometría <u>indirecta</u> (ie, $\delta = -1$) $u : V \to V$ resp. a una base ortonormal. Entonces, A es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad \text{donde } a^2 + b^2 = 1.$$

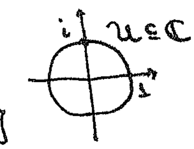
Más aún, existe una única <u>recta</u> $L \subseteq V$ (ie, $\dim_{\mathbb{R}}(L) = 1$) tal que $u = s_L$ es la reflexión respecto a L.

Dem: Si $\delta = -1$ entonces $d = -a$ y $c = +b$, donde $a^2 + b^2 = 1$. Notar que ${}^tA = A$ en este caso y luego $A{}^tA = I_2 \iff A^2 = I_2$. Luego, los valores propios de u son 1 y -1, y los vectores propios asociados e_1 y e_{-1} son <u>ortogonales</u> (cf. pág 111). Así, $u = s_L$ donde $L = V_1 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(e_1)$. ∎

Corolario: Toda isometría de un plano euclídeo es el producto de a lo más dos reflexiones.

Dem: Sea $V \cong \mathbb{R}^2$ plano euclídeo y $u : V \xrightarrow{\sim} V$ isometría. Si $\det(u) = -1$ entonces $u = s$ es una reflexión ✓. Si $\det(u) = 1$ y $s : V \to V$ es una reflexión arbitraria, entonces $\det(s \circ u) = \underbrace{\det(s)}_{=-1}\,\underbrace{\det(u)}_{=1} = -1$ y luego $s \circ u$ es una reflexión. Finalmente, $u = s \circ (s \circ u)$, pues $s^2 = \mathrm{Id}_V$ ✓ ∎

Notación: Sea $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ el círculo de radio 1. Explícitamente:



$$\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| = 1\} = \{a + ib \in \mathbb{C} \text{ tq } a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a^2 + b^2 = 1\}$$

Entonces, $\mathcal{U}$ es un <u>grupo abeliano</u> respecto a la multiplicación en $\mathbb{C}$.

Prop: Sea $A \in Gl_2(\mathbb{R})$ la matriz de una isometría <u>directa</u> (ie, $\delta = 1$) $u : V \to V$ resp. a una base ortonormal. Entonces, A es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{donde } a^2 + b^2 = 1.$$

Más aún, $\varphi : \mathcal{U} \xrightarrow{\sim} SO(2)$, $a + ib \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ es un <u>isomorfismo de grupos</u>. En part, $SO(2)$ es un <u>grupo abeliano</u>.

Dem: Si $\delta = 1$ entonces $d = +a$ y $c = -b$, donde $a^2+b^2 = 1$. Luego, $\varphi : \mathcal{U} \to SO(2)$, $a+ib \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ es biyectiva. Veamos que respeta las estructuras de grupo (ie, $\varphi(zz') = \varphi(z)\varphi(z')$): si $z = a+ib$ y $z' = a'+ib'$ entonces $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'-bb' & -ab'-a'b \\ a'b+ab' & aa'-bb' \end{pmatrix}$, mientras que

$zz' = (a+ib)(a'+ib') = (aa'-bb') + i(ab'+a'b)$ ✓ ∎

Def: Sea V un plano euclidiano. Los elementos de $SO(2)$ (ie, isometrías de determinante 1) serán llamados rotaciones. En part, dado que $SO(2) \cong \mathcal{U}$ es un grupo abeliano, si $r_1, r_2 \in SO(2)$ son rotaciones entonces $r_1 \circ r_2 = r_2 \circ r_1$.

Obs importante: Sea $r : V \xrightarrow{\sim} V$ una rotación de $V \cong \mathbb{R}^2$ y sea $\mathcal{B}$ una base ortonormal. Entonces, $R = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r)$ es de la forma

$$R = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{donde } a^2+b^2 = 1.$$

Notamos la similitud con la matriz de rotación (cf. pág 28) $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Nos gustaría asociar a r un "ángulo" $\theta \in \mathbb{R}$ tq $R = R_\theta$, ie, $a = \cos\theta$ y $b = \sin\theta$: Notamos que $2a = \mathrm{tr}(r)$ y luego $a = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(r)$ es independiente de $\mathcal{B}$ (ie, está definido intrínsecamente por $r : V \to V$). Sin embargo, el coeficiente b está determinado por $a^2+b^2 = 1$ y luego se requiere escoger un signo!

(Idea: $b = \sin\theta$ se percibe el "signo" del ángulo θ). Explícitamente: Sea $\mathcal{B}'$ otra base ortonormal de V y sea $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$. ($\Rightarrow {}^tPP = I_2$).

Caso 1: $\det(P) = 1$, ie, $P \in SO(2)$:

Dado que $SO(2)$ es conmutativo, $PR = RP$ en este caso. Luego:

$R' := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(r) = P^{-1}RP = P^{-1}PR = R$.

Caso 2: $\det(P) = -1$, ie, P es una reflexión:

Notar que $\det(PR) = -1$, y luego P y PR son reflexiones $\Rightarrow P^2 = (PR)^2 = I_2$.

Luego, $R' = P^{-1}RP = PRP = \underbrace{(PRPR)}_{=I_2}R^{-1} = R^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

"El cambio de base indirecto invierte el "ángulo" de rotación"

Conclusión: Una vez fijada una base ortonormal, hay 2 tipos de cambio de base: los que preservan el sentido de rotación (caso 1) y los que lo invierten (caso 2).

Def/Prop (orientación): Sea $V \cong \mathbb{R}^n$ un $\mathbb{R}$-ev. Definimos la relación de equivalencia siguiente en el conjunto de bases de V:

$$\mathcal{B} \sim \mathcal{B}' \overset{\text{def}}{\iff} \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0.$$

Hay exactamente dos clases de equivalencia, cada una llamada una orientación de V.

Dem: sabemos que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$ y luego $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}$ (reflexiva). Sean $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ bases de V $\Rightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'') \Rightarrow \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'')$ y luego $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$ y $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'') > 0$ implica $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') > 0$ (transitiva). En part, si $\mathcal{B}'' = \mathcal{B}$ entonces $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = 1$ por lo que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0 \Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) > 0$ (simétrica). Luego, $\sim$ es una relación de equivalencia ✓

Sea $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ una base de V y sea $\mathcal{C}_0 := (-e_1, e_2, \dots, e_n)$ base de V.
$\Rightarrow \det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{C}_0) = -1$ y luego $\mathcal{B}_0 \not\sim \mathcal{C}_0$ no están relacionadas. Veamos que $[\mathcal{B}_0]$ y $[\mathcal{C}_0]$ son las únicas clases: Sea $\mathcal{B}$ una base cualquiera de V. Si $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) > 0$ entonces $\mathcal{B} \in [\mathcal{B}_0]$, y si $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) < 0$ entonces:

$$\det_{\mathcal{C}_0}(\mathcal{B}) = \underbrace{\det_{\mathcal{C}_0}(\mathcal{B}_0)}_{=-1}\underbrace{\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})}_{<0} > 0 \Rightarrow \mathcal{B} \in [\mathcal{C}_0] \quad ✓ \quad ■$$

Obs: Sea $V \cong \mathbb{R}^n$ un $\mathbb{R}$-ev, entonces "elegir una orientación de V" es escoger una base $\mathcal{B}_0$ de V y la orientación que le corresponde, ie, todas las bases $\mathcal{B}$ de V tal que $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) > 0$; las cuales llamaremos bases directas, mientras que las otras serán bases indirectas. Diremos que V es un espacio orientado.

⚠ Por convención, orientaremos canonicamente a $\mathbb{R}^n$ declarando que la base canónica es directa: es la orientación canónica de $\mathbb{R}^n$.

Def: Sea $V \cong \mathbb{R}^2$ un plano euclideano orientado y sea $r : V \xrightarrow{\sim} V$ una rotación de V (ie, $r \in SO(2)$). Entonces (por la discusión anterior), para toda base directa ortonormal $\mathcal{B}$ de V existe $\theta \in \mathbb{R}$ (único módulo $2\pi\mathbb{Z}$) tal que

$$R = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Llamaremos a θ el ángulo de rotación de r y escribiremos $r = r_\theta$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea V un plano euclideano orientado y sean $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Verificar que las rotaciones r_θ y $r_{\theta'}$ cumplen $r_\theta \circ r_{\theta'} = r_{\theta+\theta'}$, $r_0 = \mathrm{Id}_V$ y $r_\pi = -\mathrm{Id}_V$.

Lema: Sea $V \cong \mathbb{R}^2$ un plano euclideano, y sean $x, y \in V \setminus \{0\}$ no-nulos tal que $\|x\| = \|y\|$. Entonces, existe una única rotación $r : V \to V$ tq $r(x) = y$.

Dem: Sea $e_1 = \frac{x}{\|x\|}$ vector unitario. Sea $e_2 \in V$ tq $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ es una base ortonormal (eg. completar e_1 en una base y usar Gram-Schmidt). Si escribimos $\frac{y}{\|y\|} = ae_1 + be_2$ entonces $a^2 + b^2 = 1$. Sea r la rotación de matriz

$$R = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow r(e_1) = ae_1 + be_2 \Leftrightarrow r\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{y}{\|y\|} \underset{\|x\| = \|y\|}{\Longleftrightarrow} r(x) = y$ ✓ Si r' es otra rotación tal que $r'(x) = y \Rightarrow (r'^{-1} \circ r)(x) = x$ y luego $\lambda_1 = 1$ es valor propio de $r'' = r'^{-1} \circ r$. Como $\det(r'') = 1 = \underbrace{\lambda_1}_{=1}\lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = 1$ (2^{do} valor propio) $\Rightarrow r'' = \mathrm{Id}_V \Leftrightarrow r = r'$ ■

Def: Sea $V \cong \mathbb{R}^2$ un plano euclideano orientado y sean $x, y \in V\setminus\{0\}$ no-nulos. Sea $r = r_\theta$ la única rotación que envía $\frac{x}{\|x\|}$ en $\frac{y}{\|y\|}$. Definimos el ángulo orientado en x, y como

$$\measuredangle(x,y) := \theta \quad ,$$

donde $\theta \in \mathbb{R}$ es único módulo $2\pi\mathbb{Z}$. En part, único si suponemos $\theta \in]-\pi,\pi]$.

Observación: ① gracias a la demostración del lema anterior:

$$\frac{y}{\|y\|} = ae_1 + be_2 \Rightarrow a = \cos\measuredangle(x,y) = \langle e_1, \frac{y}{\|y\|}\rangle = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|} \Rightarrow \boxed{\cos(\measuredangle(x,y)) = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}}.$$

$$b = \det\begin{vmatrix}1 & a\\ 0 & b\end{vmatrix} = \det_{\mathcal{B}}(e_1, \frac{y}{\|y\|}) = \frac{\det_{\mathcal{B}}(x,y)}{\|x\|\|y\|} = \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')}_{=1} \frac{\det_{\mathcal{B}'}(x,y)}{\|x\|\|y\|}$$ donde $\mathcal{B}'$ es cualquier base ortonormal directa $\Rightarrow \boxed{\sin(\measuredangle(x,y)) = \frac{\det_{\mathcal{B}}(x,y)}{\|x\|\|y\|}}$.

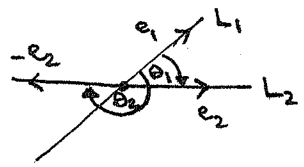
② si $-\pi < \measuredangle(x,y) \leq \pi$, el ángulo no-orientado (cf §34) entre x e y es $\theta(x,y) = |\measuredangle(x,y)|$.

③ si $r \in SO(2)$ es una rotación, entonces $(r \circ r_\theta)(x) = r(y)$ y como $r_\theta \circ r = r_\theta \circ r$ (pues $SO(2) \cong \mathbb{U}$ conmutativo) se tiene $(r \circ r_\theta)(x) = r_\theta(r(x))$ para todo $x, y \in V$ con $r_\theta(x) = y$. En part, $\measuredangle(r(x), r(y)) = \measuredangle(x,y) \mod 2\pi\mathbb{Z}$.

Ejercicio ① Sea $s: V \to V$ una reflexión. Probar que $\measuredangle(s(x), s(y)) = -\measuredangle(x,y) \mod 2\pi\mathbb{Z}$

② Sean $x, y, z \in V\setminus\{0\}$ no-nulos. Probar que
$\measuredangle(x,y) + \measuredangle(y,z) = \measuredangle(x,z) \mod 2\pi\mathbb{Z}$, $\measuredangle(y,x) = \measuredangle(x,-y) \mod 2\pi\mathbb{Z}$, y que
$\measuredangle(x,-y) = \measuredangle(x,y) + \pi \mod 2\pi\mathbb{Z}$. [Indicación: Usar Ejercicio en pág. 115].

Obs: La última relación implica que si L_1 y L_2 son rectas en V, generadas por vectores unitarios e_1 y e_2, respectivamente, entonces módulo $2\pi\mathbb{Z}$ se tiene
$\measuredangle(e_1,e_2) = \measuredangle(e_1,-e_2) + \pi$, y luego $\measuredangle(e_1,e_2) = \measuredangle(e_1,-e_2)$ módulo $\pi\mathbb{Z}$.



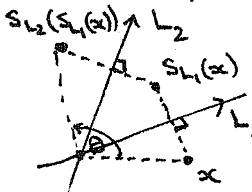
$\theta_1 \equiv \theta_2 \pmod{\pi\mathbb{Z}}$. En part, $\measuredangle(e_1,e_2) \mod \pi\mathbb{Z}$ sólo depende de L_1 y L_2!

Def: Sean $L_1, L_2 \subseteq V$ dos rectas en el plano euclideano orientado V, y sean e_1 y e_2 vectores directores unitarios. Definimos el ángulo entre L_1 y L_2 como $\measuredangle(L_1,L_2) := \measuredangle(e_1,e_2) \mod \pi\mathbb{Z}$. En part, $\measuredangle(L_1,L_2)$ es único si lo suponemos en $[0,\pi[$.

Prop: Sean $L_1, L_2 \subseteq V$ dos rectas en un plano euclideano orientado V. Entonces,

$$s_{L_2} \circ s_{L_1} = r_{2\measuredangle(L_1,L_2)}.$$

Dem: Sean e_1 y e_2 vectores directores unitarios. Dado que $\det(s_{L_2} \circ s_{L_1}) = (-1)^2 = 1$, sabemos que $s_{L_2} \circ s_{L_1} = r_\theta \in SO(2)$ es una rotación. Basta calcular θ:



Si $x = e_1$: $\theta = \measuredangle(e_1, s_{L_2}(s_{L_1}(e_1))) = \measuredangle(e_1, s_{L_2}(e_1))$

$\underset{\uparrow}{=} \measuredangle(e_1, e_2) + \measuredangle(e_2, s_{L_2}(e_1)) = \measuredangle(e_1, e_2) + \measuredangle(s_{L_2}(e_2), s_{L_2}(e_1))$

Ejercicio anterior

$\overset{\downarrow}{=} \measuredangle(e_1, e_2) - \measuredangle(e_2, e_1) = 2\measuredangle(e_1, e_2)$ ■

§38. Isometrías del espacio

En toda esta sección $V \cong \mathbb{R}^3$ será un espacio euclideano de dimensión 3. Para describir los elementos de $O(3)$ usaremos argumentos más geométricos.

Teorema: Sea $V \cong \mathbb{R}^3$ un espacio euclideano y sea $u : V \xrightarrow{\sim} V$ una isometría de V (ie, $u \in O(3)$). Entonces, existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ de V tal que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ es de la forma

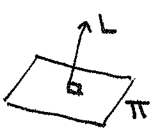
$$A = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

donde $a^2 + b^2 = 1$ y $\delta = \pm 1$ es el determinante de u.

Dem: El polinomio característico $P_u(X) \in \mathbb{R}[X]$ es de grado 3, por lo que posee necesariamente una raíz real $\lambda \in \mathbb{R}$ (por continuidad). Sea x un vector propio asociado al valor propio λ, entonces:

$$\|x\| \underset{u \in O(3)}{=} \|u(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| \underset{x \neq 0}{\Longrightarrow} |\lambda| = 1, \text{ ie, } \lambda = \pm 1.$$

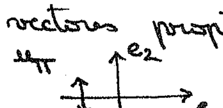
Caso 1 ($\lambda = 1$): En este caso, existe $x \neq 0$ (que podemos suponer unitario, ie, $\|x\| = 1$) tal que $u(x) = x$. Sea $L = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(x)$ recta, estable por u: $u(L) = L$.
Sea $\Pi := L^\perp$ plano ortogonal a L, estable por u pues $u(L^\perp) = u(L)^\perp$ ✓



$\Pi \cong \mathbb{R}^2$ es un plano euclideano y podemos aplicar los resultados de la sección anterior. Sea $u_\Pi := u|_\Pi : \Pi \xrightarrow{\sim} \Pi$ isometría.
Notar que $\det(u) = \lambda \det(u_\Pi) = \det(u_\Pi)$ en este caso !

$\boxed{\text{Subcaso (a)}}$: Si $\delta = \det(u) = \det(u_\Pi) = -1$ entonces $u_\Pi \in O(2)$ es una reflexión.
En part, $\exists\, \mathcal{B}'$ base ortonormal de $\Pi \cong \mathbb{R}^2$ formada por vectores propios de u_Π

$\Rightarrow B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u_\Pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, con $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$



Si $\mathcal{B} := (e_2, e_1, x)$ base ortonormal $\Rightarrow A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

$\boxed{\text{Subcaso (b)}}$: Si $\delta = +1$ entonces $u_\Pi \in SO(2)$ es una rotación. En part, $\exists\, \mathcal{B}'$ base ortonormal de $\Pi \cong \mathbb{R}^2$ tq $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u_\Pi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ con $a^2 + b^2 = 1$.
Si $\mathcal{B} := (x, e_1, e_2)$ base ortonormal $\Rightarrow A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$ con $a^2 + b^2 = 1$ ✓

Caso 2 ($\lambda = -1$): Considerar $-u \in O(3)$ que posee a 1 como valor propio y cumple $\det(-u) = (-1)^3 \det(u) = -\delta$. Luego, basta aplicar el Caso 1 a $-u$ ✓ ■