§36. Endomorfismo adjunto y endomorfismos simétricos (o auto-adjuntos)

Prop: Sea V un espacio euclideano. Para todo endomorfismo $u : V \to V$ existe un único endomorfismo $u^* : V \to V$ que cumple:
$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle \quad \text{para todos } x, y \in V.$$
Además, $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u^*)$. Decimos que u^* es el adjunto de u.

Dem: Si escribimos $B = \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ producto escalar, entonces denotamos $\hat{B} : V \to V^*$, $y \mapsto \langle \cdot, y\rangle = \langle y, \cdot\rangle$. Luego, la identidad buscada se escribe como $\hat{B}(y)(u(x)) = \hat{B}(u^*(y))(x)$ o bien (ver §28) ${}^t u \circ \hat{B} = \hat{B} \circ u^*$.

Dado que B es no-degenerada, $\hat{B}$ es un isomorfismo y luego definimos $u^* := \hat{B}^{-1} \circ {}^t u \circ \hat{B}$ como el adjunto de u. En part, $\mathrm{rg}(u^*) = \mathrm{rg}({}^t u) = \mathrm{rg}(u)$ ■

Ejemplo: Sea $u : V \xrightarrow{\sim} V$ automorfismo, ie, $u \in GL(V)$. Entonces, u es una isometría (ie, $u \in O(n)$) $\Leftrightarrow \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle \;\forall x, y \in V$
$$\Leftrightarrow \langle x, (u^* \circ u)(y)\rangle = \langle x, y\rangle \;\forall x, y \in V$$
$$\Leftrightarrow u^* \circ u = u \circ u^* = \mathrm{Id}_V \Leftrightarrow u^* = u^{-1}.$$

Prop: Sea V un espacio euclideano y sea $\mathcal{B}$ una base ortonormal de V. Entonces, para todo endomorfismo $u : V \to V$ se tiene que:
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u).$$

Dem: Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ y escribimos $u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$ para $j \in \{1, \ldots, n\}$, entonces dado que $\mathcal{B}$ es ortonormal tenemos (cf. §35) que: $a_{ij} = \langle u(e_j), e_i\rangle = \langle e_j, u^*(e_i)\rangle$.
Del mismo modo, $u^*(e_i) = \sum_{j=1}^n \langle u^*(e_i), e_j\rangle e_j = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$ y por ende:
$u^*(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ji} e_i$ ✓ ■

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sean u y v endomorfismos de un espacio euclideano V. Probar que $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$ y que $(u^*)^* = u$.

Def: Sea V un espacio euclideano, y sea $u : V \to V$ un endomorfismo. Decimos que u es simétrico (o auto-adjunto) si $u = u^*$. Es decir,
$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle \quad \text{para todos } x, y \in V.$$

Obs: Sea $\mathcal{B}$ una base ortonormal de V. Entonces, un endomorfismo $u : V \to V$ es simétrico $\Leftrightarrow A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ es simétrica (ie, $A = {}^t A$).

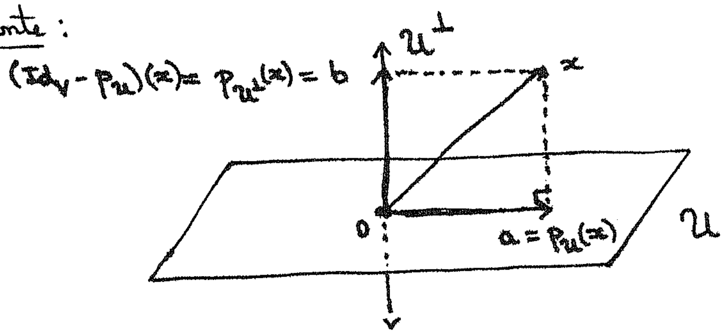
$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $V \cong \mathbb{R}^n$ espacio euclideano. Probar que el conjunto $S \subseteq \mathrm{End}(V)$ dado por $S = \{u : V \to V \text{ endomorfismo simétrico}\} \subseteq \mathrm{End}(V) \cong M_n(\mathbb{R})$ es un sub-ev y que $\dim_{\mathbb{R}}(S) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

<u>Recuerdo</u>: Sea V un espacio euclideano. Entonces, para todo $\mathcal{U} \subseteq V$ sub-ev se cumple que $V = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^{\perp}$. En part, <u>todo</u> vector $x \in V$ se escribe de manera única como $x = a + b$, con $a \in \mathcal{U}$ y $b \in \mathcal{U}^{\perp}$. Luego, podemos definir

$$P_{\mathcal{U}} : V \longrightarrow V \qquad \text{y} \qquad P_{\mathcal{U}^{\perp}} : V \longrightarrow V$$
$$\qquad x \longmapsto a \qquad\qquad\qquad\qquad x \longmapsto b$$

En particular, $P_{\mathcal{U}} + P_{\mathcal{U}^{\perp}} = Id_V$.

<u>Geométricamente</u>:



<u>Notación</u>: Sea $\mathcal{U} \subseteq V$ sub-ev de un espacio euclideano (o simplemente un evn) V, y sea $x \in V$ un vector. La <u>distancia entre x y $\mathcal{U}$</u> está definida por:

$$d(x, \mathcal{U}) := \inf_{y \in \mathcal{U}} d(x, y) = \inf_{y \in \mathcal{U}} \|x - y\|.$$

Es decir, $d(x, \mathcal{U})$ es la distancia más pequeña entre $x \in V$ y un vector en $\mathcal{U}$.

<u>Teorema</u>: Sea V un espacio euclideano y $\mathcal{U} \subseteq V$ un sub-ev. Entonces, la aplicación $P_{\mathcal{U}} : V \to V$ definida anteriormente es <u>lineal</u> y cumple $P_{\mathcal{U}}^2 = P_{\mathcal{U}}$, su kernel es $\ker(P_{\mathcal{U}}) = \mathcal{U}^{\perp}$ y su imagen es $\operatorname{Im}(P_{\mathcal{U}}) = \mathcal{U}$. Más aún, $P_{\mathcal{U}}$ es un endomorfismo <u>simétrico</u> (ie, auto-adjunto: $P_{\mathcal{U}}^* = P_{\mathcal{U}}$) que llamamos la <u>proyección ortogonal sobre $\mathcal{U}$</u>. Además, para todo $x \in V$ y todo $y \in \mathcal{U}$ se tiene:

$$\|x - P_{\mathcal{U}}(x)\| \leq \|x - y\| \iff d(x, \mathcal{U}) = \|x - P_{\mathcal{U}}(x)\|.$$

<u>Dem</u>: Sean $x, x' \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Escribimos $x = a + b$ y $x' = a' + b'$, donde $a, a' \in \mathcal{U}$ y $b, b' \in \mathcal{U}^{\perp}$. Luego, $x + \lambda x' = \underbrace{(a + \lambda a')}_{\in \mathcal{U}} + \underbrace{(b + \lambda b')}_{\in \mathcal{U}^{\perp}}$ por lo que:

$P_{\mathcal{U}}(x + \lambda x') = a + \lambda a' = P_{\mathcal{U}}(x) + \lambda P_{\mathcal{U}}(x')$, ie, $P_{\mathcal{U}} : V \to V$ es lineal ✓

Más aún, dado que $V = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^{\perp}$, se tiene (por definición de $P_{\mathcal{U}}$) que $\ker(P_{\mathcal{U}}) = \mathcal{U}^{\perp}$ y que $P_{\mathcal{U}}(a) = a$ si $a \in \mathcal{U}$. En part, $\operatorname{Im}(P_{\mathcal{U}}) = \mathcal{U}$ y

$P_{\mathcal{U}}^2(x) = P_{\mathcal{U}}(P_{\mathcal{U}}(x)) = P_{\mathcal{U}}(a) = a = P_{\mathcal{U}}(x)$, ie, $P_{\mathcal{U}}^2 = P_{\mathcal{U}}$ ✓

Más aún: $\langle P_{\mathcal{U}}(x), x' \rangle = \langle a, x' \rangle = \langle a, a' + b' \rangle = \langle a, a' \rangle$ y, del mismo modo,

$\langle x, P_{\mathcal{U}}(x') \rangle = \langle x, a' \rangle = \langle a, a' \rangle \Rightarrow P_{\mathcal{U}}^* = P_{\mathcal{U}}$ (ie, $P_{\mathcal{U}}$ es simétrico).

Finalmente, si $y \in \mathcal{U}$ entonces:

$$\|x - y\|^2 = \|\underbrace{(a - y)}_{\in \mathcal{U}} + \underbrace{b}_{\in \mathcal{U}^{\perp}}\|^2 \underset{\text{Pitágoras}}{=} \|a - y\|^2 + \|b\|^2 \geq \|b\|^2 \underset{b = x - a}{=} \|x - P_{\mathcal{U}}(x)\|^2 \qquad \blacksquare$$

⚠ <u>Observación importante</u>: Sea V un espacio euclídeano y $\mathcal{U} \subseteq V$ sub-ev. Si $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{U}) = r$ y $(e_1, \dots, e_r)$ es una base <u>ortogonal</u> de $\mathcal{U}$, entonces para todo vector $x \in V$ se tiene que:

$$p_{\mathcal{U}}(x) = \langle x, e_1 \rangle \frac{e_1}{\|e_1\|^2} + \dots + \langle x, e_r \rangle \frac{e_r}{\|e_r\|^2}.$$

En efecto, sea $a := \langle x, e_1 \rangle \frac{e_1}{\|e_1\|^2} + \dots + \langle x, e_r \rangle \frac{e_r}{\|e_r\|^2} \in \mathcal{U}$ y sea $b := x - a$. Luego, para todo $j \in \{1, \dots, r\}$ se tiene que:

$$\langle b, e_j \rangle = \langle x - a, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle a, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \frac{\langle x, e_j \rangle}{\|e_j\|^2} \langle e_j, e_j \rangle = 0$$

$\Rightarrow b \in \mathcal{U}^{\perp}$ y luego $p_{\mathcal{U}}(x) = a$ ✓

En particular, si $(e_1, \dots, e_r)$ es una base <u>ortonormal</u> de $\mathcal{U}$, entonces

$$p_{\mathcal{U}}(x) = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle x, e_r \rangle e_r.$$

$\boxed{\text{¡Atención!}}$: La fórmula de $p_{\mathcal{U}}(x)$ apareció en el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. En efecto, usando la misma notación que en §35, tenemos que:

$$e_j'' = e_j - \langle e_j, e_1'' \rangle \frac{e_1''}{\|e_1''\|^2} - \dots - \langle e_j, e_{j-1}'' \rangle \frac{e_{j-1}''}{\|e_{j-1}''\|^2} = e_j - p_{\mathcal{U}_{j-1}}(e_j),$$

donde $\mathcal{U}_{j-1} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(e_1, \dots, e_{j-1}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(e_1'', \dots, e_{j-1}'')$. Dado que $p_{\mathcal{U}} + p_{\mathcal{U}^{\perp}} = \mathrm{Id}_V$, tenemos que $e_j'' = e_j - p_{\mathcal{U}_{j-1}}(e_j) = (\mathrm{Id}_V - p_{\mathcal{U}_{j-1}})(e_j) = p_{\mathcal{U}_{j-1}^{\perp}}(e_j)$, por lo que e_j'' es la proyección ortogonal de e_j a $\mathcal{U}_{j-1}^{\perp}$ (y en particular e_j'' es ortogonal a $\mathcal{U}_{j-1}$, tal como discutimos en §35).

<u>Def</u>: Sea V un espacio euclídeano y $\mathcal{U} \subseteq V$ un sub-ev. Definimos el endomorfismo $s_{\mathcal{U}}: V \to V$ mediante:

$$s_{\mathcal{U}}(x) := 2p_{\mathcal{U}}(x) - x \text{ para todo } x \in V \iff s_{\mathcal{U}} = 2p_{\mathcal{U}} - \mathrm{Id}_V \iff p_{\mathcal{U}} = \frac{s_{\mathcal{U}} + \mathrm{Id}_V}{2},$$

que llamaremos la <u>simetría ortogonal</u> respecto a $\mathcal{U}$. Si $\mathcal{U} = H$ es un hiperplano (ie, $\dim_{\mathbb{R}}(H) = n-1$), decimos que s_H es una <u>reflexión</u> respecto a H.

La terminología anterior está justificada por las siguientes propiedades:

<u>Prop</u>: Sea V un espacio euclídeano y $\mathcal{U} \subseteq V$ un sub-ev. Entonces, la simetría ortogonal $s_{\mathcal{U}}: V \to V$ es un <u>automorfismo</u> (ie, $s_{\mathcal{U}} \in GL(V)$) que es <u>ortogonal</u> (ie, $s_{\mathcal{U}} \in O(n)$) y <u>simétrico</u> (ie, $s_{\mathcal{U}}^* = s_{\mathcal{U}}$), y que verifica $s_{\mathcal{U}}^2 = \mathrm{Id}_V$.

Dem: La simetría $s_{\mathcal{U}} := 2p_{\mathcal{U}} - Id_V$ es combinación lineal de los endomorfismos simétricos $p_{\mathcal{U}}$ y Id_V, por lo que $s_{\mathcal{U}}$ es simétrico: $s_{\mathcal{U}}^* = 2p_{\mathcal{U}}^* - Id_V^* = 2p_{\mathcal{U}} - Id_V = s_{\mathcal{U}}$ ✓

Más aún, $s_{\mathcal{U}}^2 = s_{\mathcal{U}} \circ s_{\mathcal{U}} = (2p_{\mathcal{U}} - Id_V) \circ (2p_{\mathcal{U}} - Id_V) = 4\underbrace{p_{\mathcal{U}}^2}_{=p_{\mathcal{U}}} - 4p_{\mathcal{U}} + Id_V = Id_V$ ✓

En part, $\det(s_{\mathcal{U}})^2 = 1 \neq 0$ y luego $s_{\mathcal{U}} \in GL(V)$.

Finalmente, dado que $s_{\mathcal{U}}$ es simétrico: $s_{\mathcal{U}} \circ s_{\mathcal{U}}^* = s_{\mathcal{U}} \circ s_{\mathcal{U}} = Id_V \Rightarrow s_{\mathcal{U}}^* = s_{\mathcal{U}}^{-1}$ y luego $s_{\mathcal{U}}$ es una isometría (ie, $s_{\mathcal{U}} \in O(n)$): ver Ejemplo en pág. 107 ✓ ■

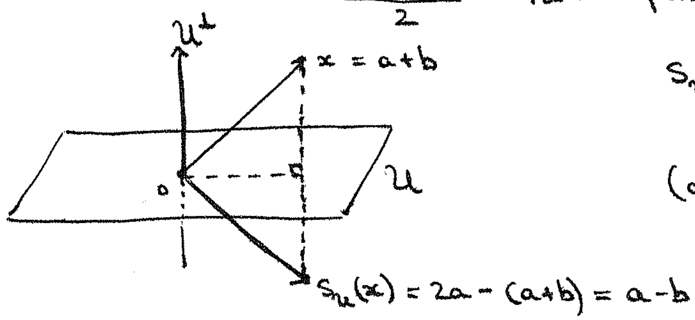
Obs: ① Notar que $p_{\mathcal{U}} + p_{\mathcal{U}^\perp} = Id_V$ implica que:

$$s_{\mathcal{U}^\perp} = 2p_{\mathcal{U}^\perp} - Id_V = 2(Id_V - p_{\mathcal{U}}) - Id_V = Id_V - 2p_{\mathcal{U}} = -s_{\mathcal{U}} \Leftrightarrow \boxed{s_{\mathcal{U}^\perp} = -s_{\mathcal{U}}}$$

② Geométricamente: Dado $x \in V$, el vector $s_{\mathcal{U}}(x)$ está caracterizado por:

(i) $x - s_{\mathcal{U}}(x)$ es ortogonal a $\mathcal{U}$

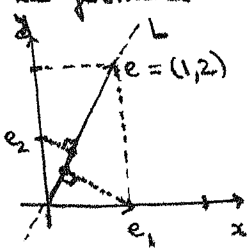
(ii) El "punto medio" $\frac{x + s_{\mathcal{U}}(x)}{2} = p_{\mathcal{U}}(x)$ pertenece a $\mathcal{U}$



$$s_{\mathcal{U}} : V \longrightarrow V$$
$$x = a+b \longmapsto s_{\mathcal{U}}(x) = a - b$$

(cf. conjugación $z \mapsto \overline{z}$ en $\mathbb{C}$).

Ejemplos: ① Sea $L = Vect_{\mathbb{R}}\langle(1,2)\rangle$ recta en $\mathbb{R}^2$. Entonces, gracias a la fórmula de p_L (ver pág 109):



$$p_L((1,0)) = \langle(1,0), e\rangle \frac{e}{\|e\|^2} = \frac{1}{5}e \quad \text{y} \quad p_L((0,1)) = \langle(0,1), e\rangle \frac{e}{\|e\|^2} = \frac{2}{5}e$$

Luego, la matriz de p_L resp. a la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es:

$$A = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{pmatrix} \text{ y la matriz de } s_L \text{ es } 2A - I_2 = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}. \text{ (simétrica)}$$

Notar que las columnas de $2A - I_2$ son ortogonales (tal como predice la teoría).

Observar que $\det(2A - I_2) = \frac{-9}{25} - \frac{16}{25} = -1$, y luego $s_L \in O(2)$ pero $s_L \notin SO(2)$ (cf. §33).

② Sea $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$ el plano de ecuación $3x - y + 2z = 0$. Para encontrar la matriz de p_Π resp. a la base canónica es más fácil deducirla a partir de $p_{\Pi^\perp}$:

La recta $L := \Pi^\perp$ está generada por $e = (3,-1,2)$ y luego:

$$p_L((1,0,0)) = \frac{3}{14}e, \; p_L((0,1,0)) = \frac{-1}{14}e, \; p_L((0,0,1)) = \frac{2}{14}e \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 9/14 & -3/14 & 6/14 \\ -3/14 & 1/14 & -2/14 \\ 6/14 & -2/14 & 4/14 \end{pmatrix} = A$$

Luego, la matriz de $p_\Pi = Id_{\mathbb{R}^3} - p_L$ es $B := I_3 - A = \begin{pmatrix} 5/14 & 3/14 & -3/7 \\ 3/14 & 13/14 & 1/7 \\ -3/7 & 1/7 & 5/7 \end{pmatrix}$

y la matriz de s_Π es $2B - I_3 = \begin{pmatrix} -2/7 & 3/7 & -6/7 \\ 3/7 & 6/7 & 2/7 \\ -6/7 & 2/7 & 3/7 \end{pmatrix}$.

Obs importante: Sea V un espacio euclideano y $\mathcal{U} \subseteq V$ un sub-ev. Entonces:

① $p_{\mathcal{U}}$ es <u>diagonalizable</u>: En efecto, $p_{\mathcal{U}}^2 - p_{\mathcal{U}} = 0$ implica que el polinomio minimal $m_{p_{\mathcal{U}}}$ divide $P(X) = X^2 - X = X(X-1)$ que escinde sobre $\mathbb{R}$ con raíces <u>simples</u> ✓

Más aún, $V = V_0 \oplus V_1$ donde $V_0 = \ker(p_{\mathcal{U}}) = \mathcal{U}^{\perp}$ y $V_1 = \ker(p_{\mathcal{U}} - Id_V) = \ker(p_{\mathcal{U}^\perp}) = \mathcal{U}$
$= Im(p_{\mathcal{U}})$

② $s_{\mathcal{U}}$ es <u>diagonalizable</u>: Similar: $s_{\mathcal{U}}^2 = Id_V$ implica que $m_{s_{\mathcal{U}}}$ divide a $P(X) = X^2 - 1$ $= (X-1)(X+1)$ que escinde sobre $\mathbb{R}$ con raíces <u>simples</u> ✓

Más aún, $V = V_{-1} \oplus V_1$ donde $V_{-1} = \ker(s_{\mathcal{U}} + Id_V) = \ker(p_{\mathcal{U}}) = \mathcal{U}^{\perp}$ y donde $V_1 = \ker(s_{\mathcal{U}} - Id_V) = \ker(p_{\mathcal{U}^\perp}) = \mathcal{U}$.

<u>Teorema</u>: Sea V un espacio euclideano. Entonces, todo endomorfismo $u: V \to V$ <u>simétrico</u> (ie, auto-adjunto: $u^* = u$) es diagonalizable en una base ortonormal.

<u>Dem</u>: Por inducción en $n = \dim_{\mathbb{R}}(V)$: Sea $u: V \to V$ endomorfismo simétrico y $\mathcal{B}$ una base ortonormal de V. Entonces, $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$ es una matriz simétrica. Veamos que u posee sólo <u>valores propios reales</u>:

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ valor propio de A y sea $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ vector columna tq $AX = \lambda X$.

Dado que $A \in M_n(\mathbb{R})$ es <u>real</u>, tenemos que $\overline{AX} = A\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$ y luego:

si escribimos $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ entonces ${}^tX\overline{X} = {}^t\overline{X}X = (\overline{x}_1 \cdots \overline{x}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\overline{x}_1 + \ldots + x_n\overline{x}_n$

$$= |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 > 0 \text{ en } \mathbb{R}!$$

$$\Rightarrow \overline{\lambda}\,\underbrace{{}^tX\overline{X}}_{\in \mathbb{R}^{>0}} = {}^tX(\overline{\lambda}\overline{X}) = {}^tXA\overline{X} \underset{\substack{\text{Matriz} \\ 1\times 1}}{=} {}^t({}^tXA\overline{X}) = {}^t\overline{X}\,{}^tAX \underset{{}^tA = A}{=} {}^t\overline{X}AX = \lambda\,\underbrace{{}^t\overline{X}X}_{\in \mathbb{R}^{>0}}$$

por lo que $\lambda = \overline{\lambda}$ y luego $\lambda \in \mathbb{R}$.

Finalmente, si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de u y si $x \in V \setminus \{0\}$ es un vector propio asociado a λ, entonces consideramos la recta $L = Vect_{\mathbb{R}}(x)$ y $H := L^{\perp}$ el hiperplano ortogonal a L. Para todo $y \in H$ tenemos que:

$$\langle u(y), x \rangle = \langle y, u^*(x) \rangle = \langle y, u(x) \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = 0.$$

por lo que $u(y) \in L^{\perp} = H$, ie, $u(H) \subseteq H$. ("H es estable por u").

Notamos que $H \cong \mathbb{R}^{n-1}$ es un espacio euclideano y que la restricción $u|_H : H \to H$ es un endomorfismo simétrico. Luego, la hipótesis de inducción prueba que $u|_H$ es diagonalizable en cierta base ortonormal $(e_2, \ldots, e_n)$ de $H = L^{\perp}$.

$\Rightarrow u$ es diagonalizable en la base ortonormal $\left(\frac{x}{\|x\|}, e_2, \ldots, e_n\right)$ de V. ■

⚠ <u>Importante</u>: Sea V un espacio euclideano y $u: V \to V$ un endomorfismo <u>simétrico</u>. La demostración anterior dice en particular que:

"Vectores propios asociados a valores propios distintos <u>son ortogonales</u>"

(Esto también se puede probar "a la mano": si $\lambda \neq \mu$ y si $x, y \in V \setminus \{0\}$ cumplen $u(x) = \lambda x$ y $u(y) = \mu y$ $\Rightarrow \lambda \langle x, y\rangle = \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle = \mu\langle x, y\rangle \underset{\lambda\neq\mu}{\Rightarrow} \langle x, y\rangle = 0$).

Comunmente se dice que V es la <u>suma directa ortogonal</u> de los espacios propios $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_p}$ de u, y escribimos $V = V_{\lambda_1} \oplus^{\perp} V_{\lambda_2} \oplus^{\perp} \cdots \oplus^{\perp} V_{\lambda_p} = \bigoplus_{j=1}^{p}{}^{\perp} V_{\lambda_j}$.

<u>Corolario</u>: Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ matriz <u>simétrica</u> real. Entonces, existe una matriz $P \in GL_n(\mathbb{R})$ <u>ortogonal</u> (ie, ${}^tPP = I_n \Leftrightarrow P^{-1} = {}^tP$) y una matriz $D \in M_n(\mathbb{R})$ <u>diagonal real</u> tal que $A = PDP^{-1} = PD\,{}^tP$.

<u>Dem</u>: Sea $u = u_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$ el endomorfismo asociado a A. Si $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, entonces $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = A$ matriz simétrica $\Rightarrow u^* = u$ ✓

Gracias al teorema anterior, existe $\mathcal{B}$ base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ tal que $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ es diagonal real. Por otra parte, la matriz de cambio de base $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ es ortogonal y $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) \Leftrightarrow D = P^{-1}AP$. ■

<u>Ejemplo</u>: Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ matriz simétrica real. Su polinomio característico es:

$$P_A(X) = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -2 \\ 0 & X-3 & 0 \\ -2 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-3)\begin{vmatrix} X-1 & -2 \\ -2 & X-1 \end{vmatrix} = (X-3)(X^2-2X+1-4)$$

$$= (X-3)(X^2-2X-3) = (X+1)(X-3)^2 \Rightarrow \lambda = -1 \text{ y } \mu = 3 \text{ valores propios.}$$

$\boxed{\lambda = -1}$: $A + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2z \\ 4y \\ 2x+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 0,\ x = -z$

Luego $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ vector propio. <u>Normalizamos</u>: $v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ genera V_λ y $\|v_1\| = 1$.

$\boxed{\mu = 3}$: $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z-2x \\ 0 \\ 2x-2z \end{pmatrix} \Rightarrow x - z = 0$.

⚠ Notar que el plano $x - z = 0$ es precisamente el ortogonal de V_λ, ie, $V_\mu = V_\lambda^{\perp}$! (Se podría haber calculado directamente de esta forma).

Luego, V_μ está generado por $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{ortogonales}}$. <u>Normalizamos</u>: $v_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ y $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{¡Atención!}}$ En general, se busca una base cualquiera del espacio propio, y se le aplica el proceso de Gram-Schmidt para ortonormalizarla.

Luego, obtenemos que:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{D}\underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{{}^tP = P^{-1}}.$$