§35. Bases ortonormadas y ortogonalización de Gram-Schmidt

Recordemos que una forma bilineal simétrica <u>definida positiva</u> no posee vectores isótropos no-nulos. En particular, tenemos:

Teorema: Sea V un espacio euclideano. Entonces, para todo $\mathcal{U} \subseteq V$ sub-ev se tiene que $V = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^{\perp}$.

Dem: Sabemos que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{U}) + \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{U}^{\perp}) = \dim_{\mathbb{R}}(V)$. Por otro lado, todo vector en $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^{\perp}$ es isótropo, y luego es nulo. ∎

Obs: Dado que $\langle \cdot , \cdot \rangle$ es definida positiva, i.e, de signatura $(n,0)$ donde $n = \dim_{\mathbb{R}}(V)$, tenemos que V admite una base ortogonal $\mathcal{B} = (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ respecto a $\langle \cdot , \cdot \rangle$ tal que $\langle \tilde{e}_i, \tilde{e}_i \rangle = \|\tilde{e}_i\|^2 > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$ (ver §31). Em part, si definimos $e_i := \dfrac{\tilde{e}_i}{\|\tilde{e}_i\|} \in V$ se tiene que $\|e_i\| = 1$.

Definición: Sea V un espacio euclideano, y sea $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ una base de V. Decimos que $\mathcal{B}$ es una <u>base ortonormal</u> (o base ortonormada) si $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. De manera más general, decimos que un conjunto $x_1, \ldots, x_m$ de vectores es una <u>familia ortonormal</u> si $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$ para todos $i, j \in \{1, \ldots, m\}$.

Obs: ① Vimos que <u>todo</u> espacio euclideano posee una base ortonormal.

② La matriz $A_{\mathcal{B}}$ de la forma bilineal $\langle \cdot , \cdot \rangle$ resp. a una base ortonormal $\mathcal{B}$ es $A_{\mathcal{B}} = I_n$ (identidad).

③ Toda familia ortonormal $x_1, \ldots, x_m$ es linealmente independiente (en part, $m \leq n$):

si $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m = 0 \Rightarrow 0 = \langle \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m, x_j \rangle = \lambda_j \underbrace{\langle x_j, x_j \rangle}_{=1} \Rightarrow \lambda_j = 0 \ \forall j$

Prop: Sea V un espacio euclideano y sea $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ una base <u>ortonormal</u> de V. Entonces, para todo $x \in V$ se tiene:

$$x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j \qquad \text{y} \qquad \|x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle^2$$

Dem: Escribamos $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \Rightarrow \langle x, e_i \rangle = \langle x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n, e_i \rangle = x_i \underbrace{\langle e_i, e_i \rangle}_{=1}$

$\Rightarrow x_i = \langle x, e_i \rangle$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. En particular,

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j, \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j \right\rangle = \langle x, e_1 \rangle^2 \underbrace{\|e_1\|^2}_{=1} + \ldots + \langle x, e_n \rangle^2 \underbrace{\|e_n\|^2}_{=1}$$ ∎

Recuerdo (ver §33): Si $Q: V \to k$ forma cuadrática, y $B: V \times V \to k$ forma bilineal simétrica asociada. Entonces un endomorfismo $u: V \to V$ es <u>ortogonal</u> respecto a Q si: $Q(u(x)) = Q(x) \ \forall x \in V \iff B(u(x), u(y)) = B(x,y) \ \forall x, y \in V$. Más aún, si B es <u>no-degenerada</u> $\Rightarrow u \in GL(V)$. En part, $u \in O(Q)$.

Prop / Def: Sea V un espacio euclideano, y sea $u: V \to V$ un endomorfismo. Las siguientes propiedades son equivalentes:

① $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ para todos $x, y \in V$.

② $\| u(x) \| = \| x \|$ para todo $x \in V$.

③ Existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ de V tal que la imagen $u(\mathcal{B})$ es una base ortonormal.

④ Para toda base ortonormal $\mathcal{B}$ de V, la imagen $u(\mathcal{B})$ es ortonormal.

⑤ La matriz $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ de u respecto a una base ortonormal $\mathcal{B}$ de V es una matriz ortogonal, ie, ${}^tAA = I_n$.

Un endomorfismo $u: V \to V$ que cumple estas propiedades es una isometría de V.

Dem: Vimos que ① $\Leftrightarrow$ ② ✓ Por otro lado, ① $\Rightarrow$ ④ $\Rightarrow$ ③ ✓ Veamos que ③ $\Rightarrow$ ②: Sea $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base ortonormal tq $u(\mathcal{B}) = (u(e_1), \dots, u(e_n))$ es una base ortonormal. Sea $x \in V$ tal que $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \Rightarrow u(x) = \sum_{j=1}^n x_j u(e_j)$ (*)

Visto: $x = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j$ (ie, $x_j = \langle x, e_j \rangle$), y además (considerando la base $u(\mathcal{B})$): $u(x) = \sum_{j=1}^n \langle u(x), u(e_j) \rangle u(e_j)$ (**)

$\underset{(*) \& (**)}{\Longrightarrow} \langle u(x), u(e_j) \rangle = \langle x, e_j \rangle$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. En part,

$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle^2 = \sum_{j=1}^n \langle u(x), u(e_j) \rangle^2 = \| u(x) \|^2$ de donde obtenemos ② ✓

Finalmente, sabemos (ver §33, pág. 100) que un endomorfismo $u: V \to V$ preserva la forma bilineal simétrica $\langle \cdot, \cdot \rangle \Leftrightarrow {}^tA A_{\mathcal{B}} A = A_{\mathcal{B}}$, donde $A_{\mathcal{B}} = (\langle e_i, e_j \rangle)_{i,j}$ es I_n si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ es ortonormal, ie, ① $\Leftrightarrow$ ⑤ ✓ ■

Terminología: Si V es un espacio euclideano, podemos definir la distancia entre $x, y \in V$ como:

$$d(x,y) = \| x - y \|.$$

Si $u: V \to V$ es un endomorfismo que preserva $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (y luego, u es necesariamente biyectivo) entonces:

$$d(u(x), u(y)) = \| u(x) - u(y) \| = \| u(x-y) \| = \| x - y \| = d(x,y).$$

Es decir, u preserva la distancia. Es por esta razón que se prefiere el término isometría (en lugar de endomorfismo ortogonal) en el contexto de espacios euclideanos. Finalmente, recordemos que una isometría $u: V \to V$ verifica $\det(u) = \pm 1$. En este contexto, decimos que u es una:

① isometría directa si $\det(u) = 1$ (ie, $u \in SO(Q)$, con $Q = \| \cdot \|^2$)

② isometría indirecta si $\det(u) = -1$.

Corolario: Sea V un espacio euclideano y sea $\mathcal{B}$ una base ortonormal. Entonces, una base $\mathcal{B}'$ de V es ortonormal $\Leftrightarrow$ La matriz $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ es ortogonal.

Dem: Sea $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ y $\mathcal{B}' = (e_1', \ldots, e_n')$. Consideremos el endomorfismo $u : V \to V$ definido por $u(e_j) := e_j'$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P$ y luego : $\mathcal{B}'$ ortonormal $\Leftrightarrow$ ${}^tPP = I_n$ (gracias a ④ $\Leftrightarrow$ ⑤) ■

Prop: Sea V un espacio euclideano y sea $u : V \to V$ una <u>isometría</u>. Entonces, para todo $\mathcal{U} \subseteq V$ sub-ev se tiene :
(a) $u(\mathcal{U}^\perp) = u(\mathcal{U})^\perp$
(b) Si $u(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$ entonces $u(\mathcal{U}^\perp) \subseteq \mathcal{U}^\perp$.

Dem: (a) Sea $y \in \mathcal{U}^\perp$, entonces para todo $x \in \mathcal{U}$ se tiene $\langle x, y \rangle = \langle u(x), u(y) \rangle = 0$, ie. $u(y)$ es ortogonal a todos los elementos de $u(\mathcal{U})$ $\Leftrightarrow u(y) \in u(\mathcal{U})^\perp$.
$\Rightarrow u(\mathcal{U}^\perp) \subseteq u(\mathcal{U})^\perp$. Por otro lado, dado que $u \in GL(V)$ es un automorfismo:

$$\dim_{\mathbb{R}}(u(\mathcal{U}^\perp)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{U}^\perp) = \dim_{\mathbb{R}}(V) - \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{U}) = \dim_{\mathbb{R}}(V) - \dim_{\mathbb{R}}(u(\mathcal{U})) = \dim_{\mathbb{R}}(u(\mathcal{U})^\perp)$$

$\Rightarrow u(\mathcal{U}^\perp) = u(\mathcal{U})^\perp$ ✓

(b) Dado que $u \in GL(V)$, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{U}) = \dim_{\mathbb{R}}(u(\mathcal{U}))$. Luego, si $u(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$ entonces $u(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \underset{(a)}{\Rightarrow} u(\mathcal{U})^\perp = u(\mathcal{U}^\perp) = \mathcal{U}^\perp$ ✓ ■

A continuación describiremos un algoritmo, llamado usualmente "<u>proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt</u>", que permite construir una base ortonormal a partir de una base cualquiera. Este método fue descubierto por Laplace en 1816, pero usualmente se le atribuye (erroneamente) a Gram (1883) y a Schmidt (1907).

Teorema: Sea V un espacio euclideano. Dada $(e_1, \ldots, e_n)$ base de V, existe una <u>única</u> base ortonormal $(e_1', \ldots, e_n')$ de V tal que :
① Para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(e_1, \ldots, e_j) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(e_1', \ldots, e_j')$, y
② $\langle e_j, e_j' \rangle > 0$.

Dem: En la práctica, primero construimos una base $(e_1'', \ldots, e_n'')$ que es sólo ortogonal y que cumple ① y ②, y luego se "normaliza":
1° Definimos $e_1'' := e_1$
2° Suponemos $e_1'', \ldots, e_{j-1}''$ ya construidos y buscamos e_j'' de la forma

$$e_j'' = e_j + \lambda_1 e_1'' + \ldots + \lambda_{j-1} e_{j-1}''.$$

Para $k \in \{1, \ldots, j-1\}$ se tiene $\langle e_j'', e_k'' \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle e_j, e_k'' \rangle + \lambda_k \|e_k''\|^2 = 0$, lo cual determina $\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}$ y luego determina e_j''.

3º Por inducción, construimos $(e_1'', \dots, e_m'')$ base ortogonal, y notamos que: Verifica ① por construcción, y $\langle e_j, e_j'' \rangle = \langle e_j'', e_j'' \rangle = \|e_j''\|^2 > 0 \rightsquigarrow$ ② ✓

4º Definimos $e_j' := \dfrac{e_j''}{\|e_j''\|}$ para $j \in \{1, \dots, n\}$ y luego $(e_1', \dots, e_m')$ es una base ortonormal que verifica ① y ②, cuya unicidad se obtiene por construcción ■

<u>Corolario</u> (Factorización QR): Sea $A \in Gl_m(\mathbb{R})$ matriz invertible. Entonces, existe un <u>único</u> par (Q, R) de matrices, donde:

① Q es ortogonal (ie, ${}^tQQ = I_m$),

② R es triangular superior con coeficientes diagonales > 0,

③ $A = QR$.

<u>Dem</u>: Los vectores columna $e_1, \dots, e_m$ de A forman una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$, a la cual aplicamos Gram-Schmidt para obtener una base <u>ortonormal</u> $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$. Sea $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$, entonces (por definición): $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$. Además, la demostración del proceso de Gram-Schmidt nos dice precisamente que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ es triangular superior con coeficientes diagonales estrictamente positivos. Por otro lado, sabemos que $\mathcal{B}'$ ortonormal $\Leftrightarrow Q := \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}')$ es ortogonal.

Finalmente, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}')\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = Q\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = Q\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')^{-1}$, donde $R := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')^{-1}$ es triangular superior con coeficientes diagonales > 0 ■

<u>Ejemplo</u>: Sea $(e_1, e_2, e_3) = ((1,1,1), (1,1,0), (1,0,0))$ base de $\mathbb{R}^3$. Gram-Schmidt:

$e_1'' := e_1 = (1,1,1) \rightsquigarrow e_2'' := e_2 - \dfrac{\langle e_2, e_1'' \rangle}{\|e_1''\|^2} e_1'' = (1,1,0) - \frac{2}{3}(1,1,1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$.

$\rightsquigarrow e_3'' := e_3 - \dfrac{\langle e_3, e_1'' \rangle}{\|e_1''\|^2} e_1'' - \dfrac{\langle e_3, e_2'' \rangle}{\|e_2''\|^2} e_2'' = (1,0,0) - \frac{1}{3}(1,1,1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0\right)$

$\Rightarrow e_1' = \dfrac{e_1''}{\|e_1''\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $e_2' = \dfrac{e_2''}{\|e_2''\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$, $e_3' = \dfrac{e_3''}{\|e_3''\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ ✓

⚠ La base obtenida <u>depende</u> del orden de los vectores de la base original. Por ejemplo, la base (e_3, e_2, e_1) nos da $e_1' = (1,0,0)$, $e_2' = (0,1,0)$, $e_3' = (0,0,1)$!

En términos de factorización QR: Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ entonces la matriz

$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$ es ortogonal y $R = Q^{-1}A = {}^tQA = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Luego, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = QR = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

<u>Obs</u>: Notar que el proceso de ortogonalización permite asociar a una familia linealmente independiente $(e_1, \dots, e_j)$ (no nec. una base), una familia ortonormal.