§34. Producto escalar y espacios euclideanos

En toda la sección, $V \cong \mathbb{R}^n$ será un $\mathbb{R}$-ev de dimensión finita.

Def: Sea V un $\mathbb{R}$-ev de dimensión finita. Un producto escalar (o "producto interno", o "producto punto") en V es una forma bilineal simétrica definida positiva. Un espacio euclideano es un espacio vectorial real dotado de un producto escalar.

Notación: El producto escalar entre dos vectores $x, y \in V$ se denota usualmente como $\langle x, y\rangle$. Así, la forma bilineal

$$\langle \cdot,\cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \langle x, y\rangle$$

es (i) simétrica: $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ para todos $x, y \in V$.
(ii) definida positiva: $\langle x,x\rangle \in \mathbb{R}^{>0}$ para $x \neq 0$ ($\Rightarrow$ el único vector isótropo es el vector nulo).

Obs: En part, $\langle \cdot,\cdot\rangle$ es no-degenerada. Más aún, dado que la signatura de $\langle \cdot,\cdot\rangle$ es $(n,0)$, donde $n = \dim_{\mathbb{R}}(V)$, siempre existe una base ortogonal $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $V \cong \mathbb{R}^n$ tal que si $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, entonces

$$\langle x,x\rangle = x_1^2 + \ldots + x_n^2 .$$

Ejemplo principal: Sea $V = \mathbb{R}^n$, la relación

$$\langle (x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\rangle := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

define un producto escalar "canónico" en $\mathbb{R}^n$, dotándolo así de estructura de espacio euclideano.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $V = \mathbb{R}_d[X]$ el $\mathbb{R}$-ev de polinomios con coeficientes reales en la variable X de grado $\leq d$. Probar que la relación

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)\, Q(t)\, dt$$

define un producto escalar en V.

Notación: Sea V espacio euclideano. Para todo $x \in V$ escribimos

$$\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle} .$$

En part, $\|x\|^2 = \langle x,x\rangle$ es la forma cuadrática asociada a $\langle \cdot,\cdot\rangle$. Luego, la fórmula de polarización se escribe como

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle .$$

Así, si x e y son ortogonales (ie, $\langle x,y\rangle = 0$) entonces se tiene

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \text{(Pitágoras)}$$

Lema (desigualdad de Cauchy-Schwarz): Sea V un espacio euclideano. Para todos $x, y \in V$ se tiene $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$. Más aún, $|\langle x,y\rangle| = \|x\|\|y\|$ si y sólo si x e y son linealmente dependientes (ie, colineales).

Dem: Si $x = 0$ el resultado es automático. Sup. que $x \neq 0$ y consideremos para $t \in \mathbb{R}$ la función $f(t) = \|tx + y\|^2 \geq 0$. Notamos que

$$\|tx+y\|^2 = \langle tx+y, tx+y\rangle = t^2\langle x,x\rangle + 2t\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$$
$$= t^2\|x\|^2 + 2t\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \geq 0 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

En part, el discriminante Δ del polinomio de grado 2 $f(t)$ es ≤ 0.

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 4\langle x,y\rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0 \Rightarrow |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\| \ ✓$$

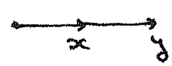
Más aún, la igualdad se alcanza cuando $\Delta = 0$, ie, cuando $f(t)$ tiene una raíz doble $t_0 \in \mathbb{R}$: $f(t_0) = \|t_0x + y\|^2 = 0 \Rightarrow t_0x + y = 0$ ✓ ■

La desigualdad de Cauchy-Schwarz implica que si $x, y \in V \setminus \{0\}$ son no-nulos entonces $-1 \leq \dfrac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1$. Luego, definimos:

Def: Sea V un espacio euclideano. Sean $x, y \in V\setminus\{0\}$ vectores no-nulos, entonces definimos el ángulo no-orientado en x e y como el único real $\theta = \theta(x,y)$ en $[0,\pi]$ tal que

$$\cos(\theta) = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}.$$

Obs: Decimos que $\theta(x,y)$ es no-orientado pues $\theta(x,y) = \theta(y,x)$. Notar que, gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que:

① $\theta(x,y) = 0 \iff y = \lambda x$ con $\lambda > 0$: 

② $\theta(x,y) = \pi \iff y = \lambda x$ con $\lambda < 0$: 

③ $\theta(x,y) = \frac{\pi}{2} \iff x$ e y son ortogonales (ie, $\langle x,y\rangle = 0$): 

Teorema: Sea V un espacio euclideano. Entonces, la aplicación $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ es una norma. Es decir, verifica:

① $\|x\| = 0 \iff x = 0$
② $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
③ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ("desigualdad triangular")

Dem: ① y ② se obtienen de la definición $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$. Para ③ notamos que

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \underset{CS}{\leq} \underbrace{\|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2}_{(\|x\|+\|y\|)^2}$$

$\Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ✓ (con igualdad $\iff x$ e y son ~~[illegible]~~ colineales). ■