§33. Grupo ortogonal

Sea V un k-ev de $\dim_k(V) = n$ y sea $Q : V \to k$ forma cuadrática. Denotamos por $B : V \times V \to k$ la (única) forma bilineal simétrica asociada a Q.

Lema: Sea $u : V \to V$ endomorfismo. Son equivalentes:
① u preserva la forma bilineal B: $B(u(x), u(y)) = B(x,y) \quad \forall x, y \in V$.
② u preserva la forma cuadrática Q: $Q(u(x)) = Q(x) \quad \forall x \in V$.

Dem: ① $\Rightarrow$ ② pues por definición $Q(x) = B(x,x)$ ✓ Por otro lado, si $u : V \to V$ preserva Q entonces la fórmula de polarización implica

$$B(u(x), u(y)) = \frac{1}{2}\Big(Q(\underbrace{u(x)+u(y)}_{u(x+y)}) - Q(u(x)) - Q(u(y))\Big)$$
$$= \frac{1}{2}\big(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\big) = B(x,y) \quad ✓ \quad \blacksquare$$

Def: Sea V un k-ev y $Q : V \to k$ forma cuadrática. Decimos que un automorfismo $u : V \xrightarrow{\sim} V$ (ie, $u \in GL(V)$) es ortogonal respecto a Q si preserva Q (o B).

Notación: $O(Q) := \{u \in GL(V) \text{ tal que } u \text{ es ortogonal respecto a } Q\} \subseteq GL(V)$.

Prop: Sea $Q : V \to k$ forma cuadrática. El conjunto $O(Q)$ es un sub-grupo de $GL(V)$, llamado el grupo ortogonal de Q.

Dem: (i) La identidad $Id_V \in GL(V)$ preserva Q.

(ii) Si $u, v \in O(Q)$ preservan Q, entonces $u \circ v$ también, pues
$$Q((u \circ v)(x)) = Q(u(v(x))) \underset{u \in O(Q)}{=} Q(v(x)) \underset{v \in O(Q)}{=} Q(x) \quad ✓ \quad \Rightarrow u \circ v \in O(Q).$$

(iii) Si $u \in O(Q)$ preserva Q, entonces u^{-1} preserva Q: sea $x \in V$ y sea $x' := u^{-1}(x)$ entonces
$$Q(u^{-1}(x)) = Q(x') \underset{u \in O(Q)}{=} Q(u(x')) \underset{u(x') = x}{=} Q(x) \quad ✓ \quad \Rightarrow u^{-1} \in O(Q) \quad \blacksquare$$

Importante: Si $Q : V \to k$ es no-degenerada, entonces todo endomorfismo $u : V \to V$ que preserva Q es necesariamente biyectivo (ie, $u \in GL(V)$). En efecto, si $u(x) = 0$ para $x \in V$ entonces (dado que u preserva la forma bilineal simétrica B):
$$B(x,y) = B(u(x), u(y)) = 0 \quad \text{para todo } y \in V$$
$$\Rightarrow x \in V^{\perp} \underset{B \text{ no-deg}}{\Rightarrow} x = 0.$$
Luego, u es inyectivo y por lo tanto biyectivo.

Recuerdo: Sea $Q : V \to k$ forma cuadrática, y $B : V \times V \to k$ forma bilineal simétrica asociada. Si $\mathcal{B}$ es una base de V, decimos que la matriz de Q en la base $\mathcal{B}$ es la matriz de B en la base $\mathcal{B}$:
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(Q) := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(B) = A_{\mathcal{B}} \in M_n(k).$$

Prop: Sea $Q : V \to k$ forma cuadrática, $\mathcal{B}$ una base de V y sea $A_{\mathcal{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(Q)$ la matriz de Q en la base $\mathcal{B}$. Sea $u : V \to V$ endomorfismo y sea $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Entonces:

① u es ortogonal respecto a $Q \iff {}^tM A_{\mathcal{B}} M = A_{\mathcal{B}}$.

② Si Q es <u>no-degenerada</u> y $u \in O(Q)$, entonces $\det(u) = \pm 1$. Más aún, el conjunto $SO(Q) := \{u \in O(Q) \text{ tal que } \det(u) = 1\}$ es un sub-grupo de $O(Q)$, llamado el <u>grupo especial ortogonal de Q</u>.

Dem: ① Sean $x, y \in V$. Si representamos x e y por los vectores columna X e Y en k^n dados por sus coordenadas respecto a la base $\mathcal{B}$, entonces sabemos que:

$$B(x,y) = {}^tX A_{\mathcal{B}} Y \Rightarrow B(u(x), u(y)) = {}^t(MX) A_{\mathcal{B}} (MY) = {}^tX\, {}^tM A_{\mathcal{B}} M Y.$$

Es decir, la matriz de la forma bilineal $(x,y) \mapsto B(u(x), u(y))$ en la base $\mathcal{B}$ es ${}^tM A_{\mathcal{B}} M$. Luego, u es ortogonal resp. a B (ie, resp. a Q) si y sólo si las formas bilineales $B(\cdot,\cdot) = B(u(\cdot), u(\cdot))$ son iguales $\iff {}^tM A_{\mathcal{B}} M = A_{\mathcal{B}}$ ✓

② Q es no-degenerada $\iff A_{\mathcal{B}} \in GL_n(k) \iff \det(A_{\mathcal{B}}) \neq 0$. Luego, si $u \in O(Q)$ entonces ${}^tM A_{\mathcal{B}} M = A_{\mathcal{B}} \Rightarrow \det(M)^2 \cancel{\det(A_{\mathcal{B}})} = \cancel{\det(A_{\mathcal{B}})} \Rightarrow \det(M)^2 = 1$. Dado que $\mathrm{car}(k) \neq 2$, $\det(M) = 1$ o -1. Finalmente, notar que:

(i) $Id_V \in O(Q)$ cumple $\det(Id_V) = 1$, ie, $Id_V \in SO(Q)$.

(ii) Si $u, v \in SO(Q)$ entonces $\det(u \circ v) = \underbrace{\det(u)}_{=1} \underbrace{\det(v)}_{=1} = 1 \Rightarrow u \circ v \in SO(Q)$

(iii) Si $u \in SO(Q)$ entonces $\det(u^{-1}) = 1/\det(u) = 1 \Rightarrow u^{-1} \in SO(Q)$ ■

Prop: Sean $Q : V \to k$ y $Q' : V \to k$ dos formas cuadráticas en V. Entonces: Si $Q \sim Q'$ son equivalentes $\Rightarrow$ Los grupos $O(Q) \cong O(Q')$ son isomorfos.

Dem: Si $Q \sim Q'$ entonces existe un automorfismo $v \in GL(V)$ tq para todo $x \in V$ se tiene $Q(x) = Q'(v(x))$. Sea $u : V \to V$ endomorfismo tq $u \in O(Q)$ (en part, $u \in GL(V)$) y sea $x \in V$, entonces:

$$Q'(x) = Q'(v \circ v^{-1}(x)) \underset{Q \sim Q'}{=} Q(v^{-1}(x)) \underset{u \in O(Q)}{=} Q(u \circ v^{-1}(x)) \underset{Q \sim Q'}{=} Q'(v \circ u \circ v^{-1}(x)).$$

Luego, $v \circ u \circ v^{-1} \in O(Q')$. Sea $\varphi : O(Q) \to O(Q')$, $u \mapsto \varphi(u) := v \circ u \circ v^{-1}$.

$\Rightarrow \varphi$ es biyectiva (pues su inversa es $\varphi^{-1} : O(Q') \to O(Q)$, $u' \mapsto v^{-1} \circ u' \circ v$) y es un <u>morfismo de grupos</u> (ie, $\varphi(u_1 \circ u_2) = \varphi(u_1) \circ \varphi(u_2)$) $\Rightarrow O(Q) \cong O(Q')$. ■

<u>Notación</u>: El estudio de $O(Q)$ para formas $Q : V \to k$ <u>no-degeneradas</u> se reduce a:

① Sobre $k = \mathbb{C}$: $Q(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2 \rightsquigarrow O(n, \mathbb{C}) = O_n(\mathbb{C})$

② Sobre $k = \mathbb{R}$: $Q(x) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2$, $n = p+q \rightsquigarrow O(p,q,\mathbb{R}) = O(p,q)$.

Si $(p,q) = (n,0)$ escribimos $O(n,0) = O(n,\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R})$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ ① Probar que $O(p,q) \cong O(q,p)$. En part, $O(Q) \cong O(Q')$ <u>no</u> implica $Q \sim Q'$.

② Probar que $O_n(k) = \{A \in M_n(k) \text{ tq } {}^tAA = I_n\}$, donde $k = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.