§32. Métodos de reducción de Gauss.

El método de reducción de Gauss de formas cuadráticas permite descomponer de manera efectiva una forma cuadrática real o compleja como combinación lineal de cuadrados de formas lineales independientes, permitiéndonos calcular su rango (y su signatura en el caso real): Hay 2 casos a considerar

Caso 1 Si Q "contiene un cuadrado", i.e., un término de la forma x_j^2:
Reordenando si fuese necesario, podemos suponer que Q se escribe como

$$Q(x_1,\dots,x_n) = \lambda_1 x_1^2 + x_1 f(x_2,\dots,x_n) + R(x_2,\dots,x_n),$$

donde $\lambda_1 \neq 0$, f forma lineal y R forma cuadrática. Formamos un cuadrado de binomio al escribir

$$Q(x_1,\dots,x_n) = \lambda_1\left(x_1 + \frac{f}{2\lambda_1}\right)^2 - \frac{f^2}{4\lambda_1} + R \quad ; \text{ y definimos } f_1 := x_1 + \frac{f}{2\lambda_1}.$$

Por inducción en el número de variables, podemos escribir la forma cuadrática $-\frac{f^2}{4\lambda_1} + R$ como $\lambda_2 f_2^2 + \dots + \lambda_r f_r^2$, donde las $f_2,\dots,f_r$ son formas lineales en las variables $(x_2,\dots,x_n)$ que son l.i. Dado que f_1 contiene un término no-nulo en la variable x_1, f_1 no es combinación lineal de $f_2,\dots,f_r$
$\Rightarrow Q = \lambda_1 f_1^2 + \dots + \lambda_r f_r^2$ con $f_1,\dots,f_r$ formas l.i. ■

Caso 2 Si Q "no contiene cuadrados":
Reordenando si fuese necesario, podemos suponer que Q se escribe como

$$Q(x_1,\dots,x_n) = a x_1 x_2 + x_1 g_1(x_3,\dots,x_n) + x_2 g_2(x_3,\dots,x_n) + R(x_3,\dots,x_n),$$

donde $a \neq 0$, g_1 y g_2 formas lineales y R forma cuadrática. Utilizamos la identidad $uv = \frac{1}{4}(u+v)^2 - \frac{1}{4}(u-v)^2$ para escribir:

$$\begin{aligned} Q(x_1,\dots,x_n) &= a\left(x_1 + \frac{g_2}{a}\right)\left(x_2 + \frac{g_1}{a}\right) - \frac{g_1 g_2}{a} + R \\ &= \frac{a}{4}\left(x_1 + x_2 + \frac{g_2+g_1}{a}\right)^2 - \frac{a}{4}\left(x_1 - x_2 + \frac{g_2-g_1}{a}\right)^2 - \frac{g_1 g_2}{a} + R \end{aligned}$$

y definimos $f_1 := x_1 + x_2 + \frac{g_2+g_1}{a}$, $f_2 := x_1 - x_2 + \frac{g_2-g_1}{a}$. Tal como antes, aplicamos la hipótesis de inducción a la forma cuadrática dada por $-\frac{1}{a}g_1g_2 + R$ y la escribimos como $\lambda_3 f_3^2 + \dots + \lambda_r f_r^2$, donde las $f_3,\dots,f_r$ son formas lineales en las variables $(x_3,\dots,x_n)$ que son l.i. Igual que antes:
$\Rightarrow Q = \lambda_1 f_1^2 + \dots + \lambda_r f_r^2$ con $f_1,\dots,f_r$ formas l.i. ■

Ejemplos: ① Sea $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $Q(x,y,z) = xy + yz + zx$ ("sin cuadrados")
Luego: $Q(x,y,z) = xy + x\underbrace{z}_{g_1} + y\underbrace{z}_{g_2} = (x+z)(y+z) - z^2$

$$= \frac{1}{4}(x+y+2z)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 - z^2 \rightsquigarrow \text{signatura } (1,2)$$

y $\operatorname{rg}(Q) = 3$ (no-degenerada).

② Sea $Q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $Q(x,y,z,t) = xy + yz + zt + tx$ ("sin cuadrados").

Luego: $Q(x,y,z,t) = xy + x\underbrace{t}_{g_1} + y\underbrace{z}_{g_2} + \underbrace{zt}_{R} = (x+z)(y+t) - \cancel{tz} + \cancel{zt}$

$$= \frac{1}{4}(x+y+z+t)^2 - \frac{1}{4}(x-y+z-t)^2$$

$\Rightarrow$ Signatura de Q es $(1,1)$ y $rg(Q) = 2$ (degenerada).

③ Sea $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dada por $Q(x,y,z,t) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2zt + tx + 3xy - yt$ ("con cuadrados").

Es conveniente comenzar con el término cuadrado de la variable que aparece menos veces: z en este caso. Luego:

$$Q(x,y,z,t) = 3z^2 - 2zt + \underbrace{(x^2 + 2y^2 + tx + 3xy - yt)}_{R_1(x,y,t)} = 3\left(z - \frac{t}{3}\right)^2 - \frac{t^2}{3} + R_1(x,y,t)$$

En la expresión $-\frac{t^2}{3} + R_1 = x^2 + 2y^2 + tx + 3xy - yt - \frac{t^2}{3}$ escogemos la variable x:

$$x^2 + x(t+3y) + \left(2y^2 - yt - \frac{t^2}{3}\right) = \left(x + \frac{1}{2}(t+3y)\right)^2 - \frac{1}{4}(t+3y)^2 + 2y^2 - yt - \frac{t^2}{3}$$

En la expresión $-\frac{1}{4}(t+3y)^2 + 2y^2 - yt - \frac{t^2}{3} = -\frac{1}{4}y^2 - \frac{7}{12}t^2 - \frac{5}{2}yt$ escogemos la variable y:

$$-\frac{1}{4}y^2 - \frac{7}{12}t^2 - \frac{5}{2}yt = -\frac{1}{4}\left(y^2 + 10yt\right) - \frac{7}{12}t^2 = -\frac{1}{4}(y+5t)^2 + \frac{17}{3}t^2$$

$$\Rightarrow Q(x,y,z,t) = 3\left(z - \frac{t}{3}\right)^2 + \left(x + \frac{t}{2} + \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{1}{4}(y+5t)^2 + \frac{17}{3}t^2$$

Luego, la signatura de Q es $(3,1)$ y $rg(Q) = 4$ (no-degenerada).

④ Sea $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz$.

Escogemos x:

$$Q(x,y,z) = x^2 + x(4y + 2z) + (y^2 + 3z^2 + 2yz)$$
$$= (x + 2y + z)^2 - (2y+z)^2 + y^2 + 3z^2 + 2yz$$
$$= (x + 2y + z)^2 - 3y^2 + 2z^2 - 2yz.$$

En la expresión $-3y^2 + 2z^2 - 2yz$ escogemos y:

$$-3y^2 + 2z^2 - 2yz = -3\left(y^2 + \frac{2}{3}yz\right) + 2z^2 = -3\left(y + \frac{z}{3}\right)^2 + \frac{7}{3}z^2$$

$$\Rightarrow Q(x,y,z) = (x + 2y + z)^2 - 3\left(y + \frac{z}{3}\right)^2 + \frac{7}{3}z^2$$

Luego, la signatura de Q es $(2,1)$ y $rg(Q) = 3$ (no-degenerada).

Ejercicio Sea $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4(xy + yz + zx)$.

① Descomponer Q como combinación lineal de cuadrados de formas lineales independientes. Determinar la signatura de Q y $rg(Q)$.

② Determinar una base de $\mathbb{R}^3$ ortogonal respecto a Q.