§31. Clasificación de formas cuadráticas reales y complejas

En esta sección nos enfocaremos en el caso $k = \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$. Las formas cuadráticas definidas sobre $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{Z}$ son muy importantes también, pero su clasificación es más delicada (Ver Jean-Pierre Serre "A course in arithmetic").

Def: Sean $Q : V \to k$ y $Q' : V \to k$ dos formas cuadráticas. Decimos que Q y Q' son equivalentes, y escribimos $Q \sim Q'$, si existe un automorfismo $u \in GL(V)$ tq: Para todo $x \in V$, $Q(x) = Q'(u(x))$.

En términos de las:

a) Forma bilineal simétrica asociada: $B(x,y) = B'(u(x), u(y))$ para todos $x, y \in V$. (gracias a la fórmula de polarización).

b) Matrices asociadas: Existen bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de V tales que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(B) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(B')$. En otras palabras, $\exists P \in GL_n(k)$ invertible tq $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(B') = {}^tP \,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(B) P$.

Obs: En part, formas cuadráticas equivalentes tienen el mismo rango.

El resultado siguiente es el recíproco de la observación anterior: sobre $\mathbb{C}$ las formas cuadráticas están determinadas por su rango:

Teorema: Toda forma de rango r sobre un $\mathbb{C}$-e.v. V se escribe como
$$Q = f_1^2 + \dots + f_r^2$$
donde $f_1, \dots, f_r \in V^*$ son formas lineales en V linealmente independientes.

Dem: Sea $Q : V \to \mathbb{C}$ forma cuadrática compleja, donde $V \cong \mathbb{C}^n$, y sea $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ una base ortogonal (respecto a Q) de V. Luego, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tales que $Q\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^2$.

La matriz de Q en la base $\mathcal{B}$ está dada por $A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$.

Por ende, el rango r de Q es el número de $\lambda_j \neq 0$: Reordenando la base $\mathcal{B}$ si fuese necesario, podemos suponer que $\lambda_1, \dots, \lambda_r \neq 0$ y $\lambda_j = 0$ para $j > r$.

Sobre $\mathbb{C}$, cada $\lambda_1, \dots, \lambda_r \neq 0$ puede ser escrito como $\lambda_j = \mu_j^2$ para ciertos $\mu_1, \dots, \mu_r \neq 0$ complejos no-nulos (esto último no siempre es posible en $\mathbb{R}$).

Si $(f_1, \dots, f_n)$ es la base dual de la base $\left(\frac{e_1}{\mu_1}, \dots, \frac{e_r}{\mu_r}, e_{r+1}, \dots, e_n\right)$ de V, entonces $Q = f_1^2 + \dots + f_r^2$. ■

⚠ Las formas $f_1, \dots, f_r \in V^*$ linealmente independientes no son únicas: Sea $Q : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ dada por $Q(x,y) = 2x^2 + 2y^2$, entonces:
$$Q(x,y) = (x\sqrt{2})^2 + (y\sqrt{2})^2 = (x+y)^2 + (x-y)^2.$$

Obs: La conclusión del teorema no es cierta en $\mathbb{R}$, pues se tendría $Q(x) \geq 0$ para todo $x \in V \cong \mathbb{R}^n$ (lo cual no es necesariamente cierto!).

Corolario: Sean $Q : V \to \mathbb{C}$ y $Q' : V \to \mathbb{C}$ dos formas cuadráticas en un $\mathbb{C}$-ev V. Entonces, $Q \sim Q' \iff rg(Q) = rg(Q')$.

Dem: Ya vimos que $Q \sim Q' \Rightarrow rg(Q) = rg(Q')$. Por otro lado, si $rg(Q) = rg(Q')$ tienen el mismo rango r, el teorema anterior implica que existen bases de V tq Q y Q' tienen la misma matriz $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-r} \end{array}\right) \Rightarrow Q \sim Q'$ ✓ ■

Veamos ahora lo que ocurre sobre $\mathbb{R}$:

Def: Sea $Q : V \to \mathbb{R}$ forma cuadrática real sobre un $\mathbb{R}$-ev $V \cong \mathbb{R}^n$. Decimos que la forma cuadrática Q es:

(a) Definida positiva si $Q(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ en V.

(a)' Semi-definida positiva si $Q(x) \geq 0$ para todo $x \in V$.

(b) Definida negativa si $Q(x) < 0$ para todo $x \neq 0$ en V.

(b)' Semi-definida negativa si $Q(x) \leq 0$ para todo $x \in V$.

Terminología: Decimos que una forma bilineal simétrica $B : V \times V \to \mathbb{R}$ (o bien, una matriz real simétrica A) es (semi-) definida positiva o negativa si la forma cuadrática asociada $Q : V \to \mathbb{R}$ lo es.

El siguiente resultado, también conocido como "Ley de inercia de Sylvester", permite descomponer las formas cuadráticas reales en partes positivas y negativas:

Teorema (Sylvester, 1852): Toda forma cuadrática de rango r sobre un $\mathbb{R}$-ev V se escribe como:

$$Q = f_1^2 + \dots + f_p^2 - f_{p+1}^2 - \dots - f_r^2,$$

donde $f_1, \dots, f_r \in V^*$ son formas lineales en V linealmente independientes, y donde $p \in \mathbb{N}$ es un entero que sólo depende de Q. Escribimos $q := r - p$ y decimos que el par (p, q) es la signatura de la forma cuadrática Q.

Dem: Sea $Q : V \to \mathbb{R}$ forma cuadrática real, donde $V \cong \mathbb{R}^n$, y sea $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ una base ortogonal (resp. a Q) de V. Luego, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $Q\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^2$. Tal como en el caso complejo, podemos suponer que los $\lambda_1, \dots, \lambda_r \neq 0$ son no-nulos y $\lambda_j = 0$ para $j > r$. Más aún, reordenando $\mathcal{B}$ si fuese necesario, podemos suponer que los primeros p valores $\lambda_1, \dots, \lambda_p > 0$ son positivos y los q siguientes $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_r < 0$ son negativos. Sobre $\mathbb{R}$, consideramos $\mu_j := \sqrt{|\lambda_j|}$ para $j = 1, \dots, r$ (esto último no siempre es posible en $\mathbb{Q}$). Si $(f_1, \dots, f_n)$ es la base dual de la base $\left(\frac{e_1}{\mu_1}, \dots, \frac{e_r}{\mu_r}, e_{r+1}, \dots, e_n\right)$ de V, entonces $Q = f_1^2 + \dots + f_p^2 - f_{p+1}^2 - \dots - f_r^2$.

Veamos ahora que p no depende de la base $\mathcal{B}$ (ie, está determinado de manera geométrica por la forma cuadrática Q):

Sean $\mathcal{U} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(e_1, \dots, e_p)$ y $W = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ sub-ev de V. Entonces, la restricción $Q|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ es definida positiva y la restricción $Q|_W$ es semi-definida negativa. En part, si $P \subseteq V$ es cualquier sub-ev tq $Q|_P : P \to \mathbb{R}$ es definida positiva entonces necesariamente $P \cap W = \{0\}$ y luego $\dim_{\mathbb{R}}(P) + \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(W)}_{=n-p} \leq n$, es decir, $\dim_{\mathbb{R}}(P) \leq p$. En otras palabras:

$$p = \max\{\dim_{\mathbb{R}}(P), \text{ donde } Q|_P \text{ definida positiva}\}$$

está completamente determinado por la forma cuadrática Q ✓ ■

Corolario: Sean $Q : V \to \mathbb{R}$ y $Q' : V \to \mathbb{R}$ dos formas cuadráticas en un $\mathbb{R}$-ev V, y sean (p,q) y (p',q') las signaturas respectivas (donde $rg(Q) = p+q$ y $rg(Q') = p'+q'$). Entonces, $Q \sim Q' \iff (p,q) = (p',q')$.

Dem: ya vimos que $Q \sim Q'$ implica que $rg(Q) = rg(Q')$. Más aún, el entero p (resp. p') está caracterizado geométricamente en términos de Q (resp. Q'). En part, si $Q \sim Q'$ entonces $p = p'$ ($\Rightarrow q = q'$).
Por otro lado, si $(p,q) = (p',q')$, entonces (gracias al teorema anterior) existen bases de V tq Q y Q' tienen la misma matriz $\left(\begin{array}{c|c|c} I_p & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_q & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0_{n-r} \end{array}\right) \Rightarrow Q \sim Q'$ ✓ ■

Ejemplos: ① Sea $V \cong \mathbb{R}^n$ y $Q : V \to \mathbb{R}$ forma cuadrática de signatura (p,q), entonces:

i) Q semi-definida positiva (resp. negativa) $\iff q = 0$ (resp. $p = 0$).
ii) Q definida positiva (resp. negativa) $\iff (p,q) = (n,0)$ (resp. $(p,q) = (0,n)$).

② Sea $c \in \mathbb{R}^{>0}$ constante real positiva. La forma cuadrática de Lorentz-Minkowski $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dada por

$$Q(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

tiene signatura $(3,1)$.

③ Si $Q : V \to \mathbb{R}$ tiene signatura (p,q), entonces la forma cuadrática $-Q : V \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto -Q(x)$ tiene signatura (q,p).

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $V \cong \mathbb{R}^n$ y $Q : V \to \mathbb{R}$ forma cuadrática no-degenerada de signatura $(1, n-1)$. Sea $x \in V$ tal que $Q(x) > 0$.

① Probar que la restricción de Q a $H := L^{\perp}$ es definida negativa, donde $L = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(x)$ es la recta generada por $x \in V$.

② Sea $B : V \times V \to \mathbb{R}$ la forma bilineal simétrica asociada y sea $y \in V$ tal que $B(x,y) = 0$. Probar que $Q(y) \leq 0$, y que $Q(y) = 0 \iff y = 0$.