## §30. Ortogonalidad respecto a una forma cuadrática:

**Def**: Sea $B : V \times V \to \Bbbk$ una forma bilineal simétrica. Decimos que:
① Los vectores $x, y \in V$ son ortogonales si $B(x,y) = 0$.
② Si $\mathcal{U} \subseteq V$ sub-conj no-vacío, el conjunto
$$\mathcal{U}^{\perp} := \{ y \in V \text{ tq: } \forall x \in \mathcal{U},\ B(x,y) = 0 \}$$
es el ortogonal de $\mathcal{U}$.
③ Un vector $x \in V$ es isótropo si $Q(x) = B(x,x) = 0$ (ie, si es ortogonal a sí mismo).

Ejemplos: ① Sea $V = \mathbb{R}^2$ y $Q(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2^2$ forma cuadrática. La forma bilineal simétrica asociada es $B((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 - x_2y_2$. Entonces:
(a) Los vectores $e_1 = (1,0)$ y $e_2 = (0,1)$ son ortogonales.
(b) Si $L = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(e_1)$ entonces $L^{\perp} = \{(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } y_1 = 0\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(e_2)$.
(c) El vector $v = (1,1)$ es isótropo.

② Sea $B : V \times V \to \Bbbk$ bilineal simétrica. Recordemos que
$$\ker(B) = \{ x \in V \text{ tq } B(x,y) = 0 \text{ para todo } y \in V \},$$
ie, $\ker(B) = V^{\perp}$.

**Lema**: Sea $B : V \times V \to \Bbbk$ forma bilineal simétrica, $\widehat{B} : V \to V^*$, $y \mapsto B^y = B(\cdot, y)$ definida anteriormente, y sea $\mathcal{U} \subseteq V$ sub-conj no-vacío. Entonces,
$$\mathcal{U}^{\perp} = \widehat{B}^{-1}(\mathcal{U}^{\circ}).$$
En part, $\mathcal{U}^{\perp} \subseteq V$ es un sub-ev. Además, $\mathcal{U}^{\perp} \cong \mathcal{U}^{\circ}$ si $B$ es no-degenerada.

Dem: Notar que
$$\mathcal{U}^{\perp} = \{ y \in V \text{ tq } \forall x \in \mathcal{U},\ B(x,y) = 0 \} = \{ y \in V \text{ tq } \forall x \in \mathcal{U},\ \widehat{B}(y)(x) = 0 \}$$
$$= \{ y \in V \text{ tq } \widehat{B}(y) \in \mathcal{U}^{\circ} \} = \widehat{B}^{-1}(\mathcal{U}^{\circ}) \ \checkmark \ \blacksquare$$

**Teorema**: Sea $B : V \times V \to \Bbbk$ forma bilineal simétrica y $\mathcal{U} \subseteq V$ sub-ev. Entonces:
$$\dim_{\Bbbk}(\mathcal{U}) + \dim_{\Bbbk}(\mathcal{U}^{\perp}) \geq \dim_{\Bbbk}(V) \quad \text{y} \quad \mathcal{U} \subseteq (\mathcal{U}^{\perp})^{\perp}.$$
Más aún, si $B$ es no-degenerada entonces
$$\dim_{\Bbbk}(\mathcal{U}) + \dim_{\Bbbk}(\mathcal{U}^{\perp}) = \dim_{\Bbbk}(V) \quad \text{y} \quad \mathcal{U} = (\mathcal{U}^{\perp})^{\perp}.$$

Dem: Sea $(e_1, \dots, e_r)$ una base de $\mathcal{U}$. El espacio vectorial $\mathcal{U}^{\perp} \subseteq V$ está definido por las $r$ ecuaciones lineales $B(e_1, y) = \dots = B(e_r, y) = 0$. Luego, se tiene que $\dim_{\Bbbk}(\mathcal{U}^{\perp}) \geq \dim_{\Bbbk}(V) - r$ (podrían haber ecuaciones l.d.).
Por otro lado, sabemos que $\mathcal{U}^{\perp} = \widehat{B}^{-1}(\mathcal{U}^{\circ})$, por lo que si $B$ es no-degenerada entonces $\dim_{\Bbbk}(\mathcal{U}^{\perp}) = \dim_{\Bbbk}(\mathcal{U}^{\circ}) = \dim_{\Bbbk}(V) - \dim_{\Bbbk}(\mathcal{U})$ (cf. §28) ✓
Si $x \in \mathcal{U}$ entonces $B(x,y) = 0 \ \forall y \in \mathcal{U}^{\perp}$ (por def) $\Leftrightarrow B(y,x) = 0$ pues $B$ simétrica.
$\Rightarrow \mathcal{U} \subseteq (\mathcal{U}^{\perp})^{\perp}$. Por otro lado, si $B$ es no degenerada entonces el cálculo anterior prueba que $\dim_{\Bbbk}(\mathcal{U}) = \dim_{\Bbbk}(\mathcal{U}^{\perp})^{\perp}$ y luego $\mathcal{U} = (\mathcal{U}^{\perp})^{\perp}$ ✓ $\blacksquare$

⚠ ¡Atención! Incluso si $B : V \times V \to k$ es no-degenerada, no necesariamente tenemos que $V = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp$ ❗ Por ejemplo, si $V = \mathbb{R}^2$ y $B((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1 y_1 - x_2 y_2$, entonces la recta $\mathcal{U} = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x_1 = x_2\}$ verifica $\mathcal{U} = \mathcal{U}^\perp$ (vectores isótropos). Luego, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{U}) + \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{U}^\perp) = 2 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ pero $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp \neq \{0\}$.

**Def**: Sea $B : V \times V \to k$ una forma bilineal simétrica. Decimos que una base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $V$ es ortogonal (resp. a $B$) si $B(e_i, e_j) = 0$ para $i \neq j$.

**Obs**: Matricialmente, $\mathcal{B}$ es ortogonal resp. a $B$ si la matriz $A_{\mathcal{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(B)$ es diagonal:

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} B(e_1,e_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B(e_n,e_n) \end{pmatrix}$$

**Teorema**: Toda forma bilineal simétrica posee una base ortogonal.

**Dem**: Sea $B : V \times V \to k$ bilineal simétrica. Por inducción en $n = \dim_k(V)$:
si $n = 1$ toda base es ortogonal ✓ Sup. $n \geq 2$:
si $B = 0$ toda base es ortogonal ✓ Sup. que $B \neq 0$, luego la fórmula de polarización

$$B(x,y) = \tfrac{1}{2}\big(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\big)$$

implica que $\exists\, e_1 \in V \setminus \{0\}$ vector no-isótropo (i.e. $Q(e_1) \neq 0$). Sea $L = \mathrm{Vect}_k(e_1)$ la recta generada por $e_1 \Rightarrow L \cap L^\perp = \{0\}$. Más aún, sabemos que: $\dim_k(L) + \dim_k(L^\perp) \geq n$ y luego necesariamente $L \oplus L^\perp = V$.

Por hipótesis de inducción, existe una base $(e_2, \dots, e_n)$ de $L^\perp$ que es ortogonal respecto a la restricción $B|_{L^\perp} : L^\perp \times L^\perp \to k$ de $B$ a $L^\perp$. Dado que además $B(e_1, e_j) = 0$ para $j \in \{2, \dots, n\}$ (por def. de $L^\perp$) tenemos que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ es una base de $V$ que es ortogonal respecto a $B$. ■

**Corolario**: Toda forma cuadrática en un $k$-ev de dimensión $n$ es combinación lineal de $n$ cuadrados de formas lineales.

**Dem**: Sea $Q : V \to k$ forma cuadrática, y $B : V \times V \to k$ su forma bilineal simétrica asociada. Sea $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ una base de $V$ ortogonal respecto a $B$. Entonces, dado que todo $x \in V$ se escribe como $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$, tenemos que:

$$Q(x) = B(x,x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} B(e_i,e_j)\, x_i x_j = \sum_{j=1}^n B(e_j,e_j)\, x_j^2 .$$

Por otro lado, $x_j = e_j^*(x)$, donde $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ es la base dual de $\mathcal{B}$.
Así, tenemos que: $Q = \sum_{j=1}^n B(e_j,e_j)\,(e_j^*)^2$ ✓ ■

**Ejercicio** Sea $B : V \times V \to k$ forma bilineal. Supongamos que para todos $x, y \in V$ la condición "$B(x,y) = 0$" implica "$B(y,x) = 0$". Probar que $B$ es necesariamente simétrica o alternada (cf. §9).

(Indicación: Considerar la expresión $B(x, B(x,y)z - B(x,z)y)$.)