Prop: Sean V y W k-ev, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de V y $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_m)$ base de W. Sea $u : V \to W$ aplicación lineal. Entonces, la matriz de ${}^t u : W^* \to V^*$ respecto a las bases duales $\mathcal{C}^*$ y $\mathcal{B}^*$ es:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*, \mathcal{C}^*}({}^t u) = {}^t \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(u) \qquad \text{(matriz transpuesta)}$$

<u>Dem</u>: Sea $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u) \in M_{m\times n}(k)$ definida por $u(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i \rightsquigarrow A = (a_{ij})$

Luego, ${}^t u(f_i^*)(e_j) = f_i^*(u(e_j)) = \sum_{\ell=1}^{m} a_{\ell j} f_i^*(f_\ell) = a_{ij}$ y así para cada $j = 1, \dots, n$ se tiene ${}^t u(f_i^*) = \sum_{j=1}^{n} {}^t u(f_i^*)(e_j)\, e_j^* = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j^*$ en V^*.

Finalmente, la matriz $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*, \mathcal{C}^*}({}^t u) \in M_{n\times m}(k)$ está definida por $B = (b_{ij})$ tq ${}^t u(f_i^*) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} e_j^*$ (cf. §4) $\Rightarrow b_{ji} = a_{ij} \Rightarrow B = {}^t A$ ✓ ∎

Corolario: Sea $A \in M_{m\times n}(k)$, entonces $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^t A)$.

<u>Dem</u>: Considerar $u = u_A : k^n \to k^m$, $x \mapsto Ax$. Si $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{C}$) es la base canónica de k^n (resp. k^m), entonces $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u_A) = A$ y $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*,\mathcal{C}^*}({}^t u_A) = {}^t A$. Más aún, sabemos que $\mathrm{rg}(u_A) = \mathrm{rg}({}^t u_A) \Leftrightarrow \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^t A)$ ∎

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea V un k-ev. de dimensión n, $\mathcal{B}$ una base de V, y $\mathcal{B}^*$ la base dual de V^*:

1. Sea $\mathcal{C}$ otra base de V, $\mathcal{C}^*$ la base dual de V^* y sea $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ la matriz de cambio de base (cf. §5). Determinar la matriz $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*}(\mathcal{C}^*)$ en términos de P.
2. Probar que para toda base $\mathcal{D}$ de V^*, <u>existe una única</u> base $\mathcal{B}$ de V tal que $\mathcal{B}^* = \mathcal{D}$. (Se dice que $\mathcal{B}$ es la <u>base predual</u> de $\mathcal{D}$).

§29. <u>Formas bilineales y formas cuadráticas</u>

⚠ En <u>todo lo que sigue</u>, supondremos que k es un cuerpo con $\mathrm{car}(k) \neq 2$ (eg. $k = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).

Def: Sea V un k-ev. Una <u>forma bilineal</u> sobre V es una forma 2-multilineal (ver §9), ie, es una aplicación $B : V \times V \to k$ que cumple:

(a) Para todo $y \in V$ fijo: La aplicación $B^y : V \to k$, $x \mapsto B(x,y)$ es una forma <u>lineal</u>.

(b) Para todo $x \in V$ fijo: La aplicación ${}^x B : V \to k$, $y \mapsto B(x,y)$ es una forma <u>lineal</u>.

<u>Obs</u>: Explícitamente, $B : V \times V \to k$ es <u>bilineal</u> si $\forall x, y, z \in V$ y $\forall \lambda \in k$ se tiene $B(\lambda x, y) = B(x, \lambda y) = \lambda B(x,y)$; $B(x+y, z) = B(x,z) + B(y,z)$; $B(x, y+z) = B(x,y) + B(x,z)$

<u>Ejemplo</u>: $B((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ es bilineal en k^n.

⚠ Si $W = V \times V$, entonces $B : W \to k$ <u>no</u> es necesariamente lineal (sólo es lineal en cada variable!).

Sea $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ una base de V, y escribamos $x=\sum_{j=1}^{n}x_je_j$ e $y=\sum_{j=1}^{n}y_je_j$ en V. Entonces,

$$B(x,y)=B\Big(\sum_{j=1}^{n}x_je_j,\sum_{j=1}^{n}y_je_j\Big)=\sum_{1\le i,j\le n}B(e_i,e_j)\,x_i\,y_j$$

por lo que la forma bilineal B está determinada por la matriz $(B(e_i,e_j))_{i,j}$

Def: Sea $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ una base del k-ev V, y sea $B:V\times V\to k$ bilineal. Definimos la matriz de la forma bilineal B resp. a la base $\mathcal{B}$ mediante

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(B):=(B(e_i,e_j))_{i,j}\in M_n(k).$$

Si la forma bilineal es clara en el contexto, escribimos $A_{\mathcal{B}}:=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(B)$ simplemente.

⚠ Importante: Si asociamos a $x,y\in V$ sus vectores coordenadas resp. a $\mathcal{B}$, ie, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in k^n$ e $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\in k^n$ entonces:

El escalar $B(x,y)=\sum_{1\le i,j\le n}B(e_i,e_j)x_iy_j=\underbrace{(x_1\ x_2\cdots x_n)}_{\text{vector fila}}A_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}={}^tXA_{\mathcal{B}}Y$.

Luego, si $\mathcal{B}'$ es otra base de V y $P=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ la matriz de cambio de base entonces los vectores coord. $X',Y'\in k^n$ de $x,y\in V$ resp. a $\mathcal{B}'$ verifican (cf. §5): $X=PX'$ e $Y=PY'$. Luego:

$$B(x,y)={}^tXA_{\mathcal{B}}Y={}^t(PX')A_{\mathcal{B}}(PY')={}^tX'\,{}^tPA_{\mathcal{B}}P\,Y'={}^tX'A_{\mathcal{B}'}Y'$$

$$\Rightarrow \boxed{A_{\mathcal{B}'}={}^tPA_{\mathcal{B}}P}\quad(\text{"fórmula de cambio de base"}).$$

¡Atención!: $\det(A_{\mathcal{B}'})=\det(P)^2\det(A_{\mathcal{B}})$, por lo que $\det(A_{\mathcal{B}})$ depende de la base!

Def: Sea V un k-ev de dimensión finita y $B:V\times V\to k$ forma bilineal. Definimos las aplicaciones lineales:

$$\begin{aligned}\hat{B}:V&\longrightarrow V^*\\ y&\longmapsto B^y=B(\cdot,y)\end{aligned}\qquad\text{y}\qquad\begin{aligned}\check{B}:V&\longrightarrow V^*\\ x&\longmapsto {}^xB=B(x,\cdot)\end{aligned}$$

Lema: Si identificamos V y V^{**} mediante la evaluación canónica $\psi:V\to V^{**}$, entonces la aplicación transpuesta ${}^t\check{B}:V^{**}\to V^*$ cumple ${}^t\check{B}=\hat{B}$. En part, $\mathrm{rg}(\hat{B})=\mathrm{rg}(\check{B})$.

Dem: Sean $x,y\in V$, entonces:

$${}^t\check{B}(\psi(y))(x)\underset{\text{def de transp.}}{=}\psi(y)(\check{B}(x))\underset{\text{def de }\psi}{=}\check{B}(x)(y)\underset{\text{def de }\check{B}}{=}B(x,y)\underset{\text{def de }\hat{B}}{=}\hat{B}(y)(x)\Rightarrow{}^t\check{B}\circ\psi=\hat{B}\quad\blacksquare$$

Def: Sea $B:V\times V\to k$ bilineal. Definimos el rango de B, $\mathrm{rg}(B)$, como el rango $\mathrm{rg}(\hat{B})=\mathrm{rg}(\check{B})$. Decimos que B es no-degenerada si $\mathrm{rg}(B)=\dim_k(V)$, ie, si $\hat{B}$ y $\check{B}$ son biyectivos.

Terminología: Si B es no-degenerada, también se dice que $B:V\times V\to k$ es un emparejamiento perfecto: en tal caso B induce un isomorfismo $V\cong V^*$.

En términos matriciales:

Prop: Sea $B : V \times V \to k$ bilineal, $\mathcal{B}$ una base de V y $\mathcal{B}^*$ la base dual de V^*. Sea $A_{\mathcal{B}} \in M_n(k)$ la matriz de B resp. a $\mathcal{B}$, y sea $\hat{B} : V \to V^*$ como antes. Entonces:
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*,\mathcal{B}}(\hat{B}) = A_{\mathcal{B}}.$$

Dem: Sea $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ y $\mathcal{B} = (e_1^*, \dots, e_n^*)$. Sea $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*,\mathcal{B}}(\hat{B}) = (b_{ij}) \in M_n(k)$ y veamos que $b_{ij} = B(e_i, e_j)$:
$$B(e_i,e_j) = \hat{B}(e_j)(e_i) = \left(\sum_{l=1}^{n} b_{lj}\, e_l^*\right)(e_i) = \sum_{l=1}^{n} b_{lj} \underbrace{e_l^*(e_i)}_{\delta_{li}} = b_{ij} \quad \checkmark \quad ■$$

Obs importante: En part, $\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(A_{\mathcal{B}})$ para cualquier base $\mathcal{B}$ de V. Luego,

B no-degenerada $\iff A_{\mathcal{B}} \in GL_n(k)$ para cualquier base $\mathcal{B}$
$\iff \det(A_{\mathcal{B}}) \neq 0$ para cualquier base $\mathcal{B}$.
$\iff$ Para todo $y \in V \setminus \{0\}$ no-nulo, $\exists\, x \in V$ tq $B(x,y) \neq 0$.

En muchos casos, estudiaremos formas bilineales que además son "simétricas":

Def: Una forma bilineal $B : V \times V \to k$ es simétrica si para todos $x, y \in V$ se tiene:
$$B(x,y) = B(y,x).$$
Una matriz $A \in M_n(k)$ es simétrica si $A = {}^tA$.

Ejemplo: La forma $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) \mapsto x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ es simétrica.

Obs: Si $B : V \times V \to k$ es simétrica, entonces $\hat{B} = \check{B} : V \to V^*$ coinciden. En tal caso definimos el kernel de B como $\ker(B) := \ker(\hat{B}) = \ker(\check{B}) \subseteq V$, ie,
$$\ker(B) = \{x \in V \text{ tq } B(x,y) = 0 \text{ para todo } y \in V\}.$$

Prop: Sea $B : V \times V \to k$ forma bilineal. Entonces:
B es una forma bilineal simétrica $\iff A_{\mathcal{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(B)$ es simétrica para toda base $\mathcal{B}$ de V.

Dem: $(\Rightarrow)$ Si B es simétrica entonces $A_{\mathcal{B}} = (B(e_i,e_j))$ cumple ${}^tA_{\mathcal{B}} = (B(e_j,e_i))$ $= (B(e_i,e_j)) = A_{\mathcal{B}}$, ie, $A_{\mathcal{B}}$ es simétrica $\checkmark$

$(\Leftarrow)$ Sea $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ una base de V tq $A_{\mathcal{B}} = (B(e_i,e_j))$ es simétrica $\Rightarrow B(e_i,e_j) = B(e_j,e_i)$ para todos $i,j \in \{1,\dots,n\}$. Luego, para todo $x, y \in V$:
$$B(x,y) = \sum_{1\le i,j\le n} B(e_i,e_j)\,x_iy_j = \sum_{1\le i,j\le n} B(e_j,e_i)\,y_jx_i = B(y,x),$$ ie, B es simétrica $\checkmark$ ■

Def: Una forma cuadrática en un k-ev V es una aplicación $Q : V \to k$ tal que $\exists\, B : V \times V \to k$ bilineal con $Q(x) = B(x,x)$ para todo $x \in V$.

Obs: Si $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ base de V y $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ entonces
$$Q(x) = \sum_{1\le i,j\le n} B(e_i,e_j)\,x_ix_j$$

En part, las formas cuadráticas son lo mismo que las funciones (en varias variables) polinomiales homogéneas de grado 2 (ie, verifican $Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x)$ para todo $x \in V$ y $\lambda \in k$). Luego, las formas cuadráticas no son lineales!

Teorema: Sea $Q : V \to k$ una forma cuadrática. Entonces, existe una única forma bilineal simétrica $B : V \times V \to k$ tq $B(x,x) = Q(x)$. Más aún, B está dada por:

$$B(x,y) = \frac{1}{2}\big(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\big) \quad (\text{"fórmula de polarización"})$$

Diremos que B es la forma bilineal simétrica asociada a Q.

Dem: Sea $B : V \times V \to k$ una forma bilineal tq $Q(x) = B(x,x)$, entonces:

$$\begin{aligned} Q(x+y) = B(x+y, x+y) &= B(x,x) + B(x,y) + B(y,x) + B(y,y) \\ &= Q(x) + B(x,y) + B(y,x) + Q(y) \end{aligned}$$

Si B es simétrica entonces $B(x,y) = B(y,x)$, de donde obtenemos la fórmula ✓ ■

Ejemplos: ① Dada una forma cuadrática $Q : V \to k$, en general existen infinitas formas bilineales B tq $Q(x) = B(x,x)$. Por ejemplo: En $V = \mathbb{R}^2$ consideramos $Q(x_1, x_2) = 2x_1x_2$ forma cuadrática: su forma bilineal simétrica asociada es

$$B((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \frac{1}{2}\big(2(x_1+y_1)(x_2+y_2) - 2x_1x_2 - 2y_1y_2\big) = x_1y_2 + x_2y_1.$$

Sin embargo: Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ la forma bilineal $B_\lambda((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \lambda x_1 y_2 + (2-\lambda)x_2y_1$ verifica $B_\lambda(x,x) = Q(x)$. Notar que, si $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ base canónica de $\mathbb{R}^2$, entonces:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(B_\lambda) = \begin{pmatrix} B_\lambda(e_1,e_1) & B_\lambda(e_1,e_2) \\ B_\lambda(e_2,e_1) & B_\lambda(e_2,e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 2-\lambda & 0 \end{pmatrix} \text{ simétrica} \iff \lambda = 1.$$

② Sea $Q : k^n \to k$ la forma cuadrática dada por:

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \le i \le j \le n} a_{ij} x_i x_j$$

Luego, la matriz (b_{ij}) en la base canónica de la forma bilineal simétrica asociada a Q está dada por:

$$b_{ii} = a_{ii}, \quad b_{ij} = \frac{1}{2} a_{ij} \text{ si } i<j, \quad b_{ij} = \frac{1}{2} a_{ji} \text{ si } i>j.$$

③ Sea $f \in V^* \setminus \{0\}$ forma lineal no-nula. Entonces $Q(x) := f(x)^2$ es una forma cuadrática en V, cuya forma bilineal simétrica es $B(x,y) = f(x)f(y)$. En part, $\hat{B}(y) = f(y)f \in V^*$ y luego $\mathrm{Im}(\hat{B}) = \mathrm{Vect}_k(f) \subseteq V^*$ es la "recta" generada por f, ie, $\mathrm{rg}(Q) := \mathrm{rg}(B) = 1$.

Def: Sea $Q : V \to k$ forma cuadrática, y $B : V \times V \to k$ su forma bilineal simétrica asociada. Definimos el rango de Q como $\mathrm{rg}(Q) := \mathrm{rg}(B)$.

Ejercicio Probar que toda forma cuadrática de rango 1 es proporcional a una forma cuadrática como en el Ejemplo ③.