§28. Formas lineales y espacio dual.

Recuerdo: Sea V un k-e.v. Una forma lineal en V es $f : V \to k$ lineal.

Ejemplo: Si $V = \mathbb{R}^n$ entonces $pr_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ es una forma lineal.

Def: Sea V un k-e.v. Definimos el espacio dual (o simplemente dual) de V como $V^* := \mathrm{Hom}_k(V, k) = \{f : V \to k \text{ lineal}\}$.

Sup. que $\dim_k(V) = n$ y sea $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ una base de V. Para $j = 1, \dots, n$ definimos la forma $e_j^* = e^j \in V^*$ mediante

$$e_j^*(e_k) := \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

Lema: La familia $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ es una base de V^*, llamada la base dual de la base $\mathcal{B}$. En part, $\dim_k(V) = \dim_k(V^*)$ y luego $V \cong V^*$.

Dem: Si $\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j^* = 0$ en V^* $\Rightarrow 0 = \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j^*\right)(e_k) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \underbrace{e_j^*(e_k)}_{\delta_{jk}} = \lambda_j \Rightarrow \mathcal{B}^*$ l.i ✓

Sea $f \in V^*$ entonces $f = \sum_{j=1}^n f(e_j) e_j^*$ pues tienen el mismo valor en cada e_k ✓ ■

⚠ La notación e^* sólo tiene sentido si e es parte de la base!

Def: Definimos el bidual de V por $V^{**} := (V^*)^* = \mathrm{Hom}_k(V^*, k)$, y definimos la evaluación canónica $\psi : V \to V^{**}$ por $\psi(x)(f) := f(x)$ para todos $x \in V$ y $f \in V^*$.

Teorema (reflexividad): La evaluación canónica $\psi : V \to V^{**}$ es lineal y biyectiva.

Dem: Veamos que ψ es lineal: sean $x, y \in V$ y $\lambda \in k$, entonces para $f \in V^*$:

$\psi(\lambda x + y)(f) = f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) = \lambda \psi(x)(f) + \psi(y)(f) = (\lambda \psi(x) + \psi(y))(f)$ ✓

Dado que $\dim_k(V) = \dim_k(V^*) = \dim_k(V^{**})$, basta probar que ψ es inyectiva:

Sea $x \in V \setminus \{0\} \Rightarrow \exists\, \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de V tq $e_1 = x$ (teo. de base incompleta)

Sea $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ base dual $\Rightarrow \psi(x)(e_1^*) = e_1^*(x) = 1 \Rightarrow \psi(x) \neq 0$ ✓ ■

Def: Sea V un k-e.v. y $\mathcal{U} \subseteq V$ un sub-conj no-vacío de V. Definimos el ortogonal (o el anulador) de $\mathcal{U}$ en V^* como el conjunto

$$\mathcal{U}^\circ := \{f \in V^* \text{ tq } f|_{\mathcal{U}} = 0\} = \{f \in V^* \text{ tq } f(x) = 0 \ \forall x \in \mathcal{U}\}.$$

Obs: ① Notar que $\mathcal{U}^\circ \subseteq V^*$ es un sub-ev: si $f, g \in \mathcal{U}^\circ$ y $\lambda \in k$ entonces para todo $x \in \mathcal{U}$ se tiene $(\lambda f + g)(x) = \lambda f(x) + g(x) = 0 \Rightarrow \lambda f + g \in \mathcal{U}^\circ$.

② Importante: Si $W \subseteq V^*$ sub-conj no-vacío $\Rightarrow W^\circ \subseteq V^{**}$.

Si $x \in V$ entonces la imagen $\psi(x) \in V^{**}$ por la evaluación canónica está en W° $\Leftrightarrow \forall f \in W$ se tiene $0 = \psi(x)(f) = f(x)$. Luego, si identificamos V y V^{**} vía ψ:

$$W^\circ = \{x \in V \text{ tq: } \forall f \in W,\ f(x) = 0\} \subseteq V.$$

Teorema: Sea V un k-ev de dimensión finita y sea $\mathcal{U} \subseteq V$ sub-ev. Entonces:

$$\dim_k(\mathcal{U}) + \dim_k(\mathcal{U}^\circ) = \dim_k(V).$$

Dem: Si $\mathcal{U} = \{0\} \Rightarrow \mathcal{U}^\circ = V^*$ ✓. Si $\mathcal{U} \neq \{0\}$, consideramos $(e_1, \dots, e_r)$ base de $\mathcal{U}$, donde $r = \dim_k(\mathcal{U}) \geq 1$, y la completamos en una base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de V. Sea $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base dual de V^*. Notar que una forma lineal $f \in V^*$ pertenece a $\mathcal{U}^\circ \Leftrightarrow f(e_1) = \dots = f(e_r) = 0$.

Luego, si escribimos $f = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j^*$ con $\lambda_j = f(e_j)$, entonces esta última condición equivale a $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$, ie, $\mathcal{U}^\circ = \mathrm{Vect}_k(e_{r+1}^*, \dots, e_n^*) \Rightarrow \dim_k(\mathcal{U}^\circ) = n - r$. ■

Def: Sea $u : V \to W$ lineal. La aplicación <u>transpuesta</u> (o <u>dual</u>) de u es la aplicación ${}^t u : W^* \to V^*$ dada por

$$ {}^t u(g) := g \circ u $$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "{}^t u"'] & W \arrow[d, "g"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & k \end{tikzcd}$$

para todo $g \in W^*$.

Obs: ① Notar que ${}^t u : W^* \to V^*$ es <u>lineal</u> $\boxed{\text{Ejercicio}}$.

② Si consideramos ${}^t({}^t u) : V^{**} \to W^{**}$ y si identificamos $V^{**} \cong V$, $W^{**} \cong W$ usando las evaluaciones canónicas, entonces ${}^t({}^t u) = u$:

En efecto, $\forall x \in V$ y todo $g \in W^*$ se tiene que

$${}^t({}^t u)(\psi_V(x))(g) \underset{\substack{\text{def}\\ \text{de } {}^t({}^t u)}}{=} \psi_V(x)({}^t u(g)) \underset{\substack{\text{def}\\ \text{de } {}^t u}}{=} \psi_V(x)(g \circ u) \underset{\substack{\text{def de}\\ \psi_V}}{=} (g \circ u)(x) = g(u(x)) = \psi_W(u(x))(g)$$

ie, ${}^t({}^t u)(\psi_V(x)) = \psi_W(u(x))$ ✓

Teorema: Sea $u : V \to W$ lineal entre k-ev. de dimensión finita. Entonces:

$$\ker({}^t u) = (\mathrm{Im}(u))^\circ.$$

En part, u y ${}^t u$ son del mismo rango: $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}({}^t u)$.

Dem: Por def, $g \in W^*$ pertenece a $\ker({}^t u) \Leftrightarrow {}^t u(g) = 0$ en V^*

$$\Leftrightarrow ({}^t u(g))(x) = g(u(x)) = 0 \quad \forall x \in V$$

Esto último equivale a que g es ortogonal a todos los $u(x)$, ie, $g \in \mathrm{Im}(u)^\circ$ ✓

Por otro lado, tenemos que: $\dim_k(W^*) = \dim_k \ker({}^t u) + \dim_k \mathrm{Im}({}^t u)$ (teo. del rango) y $\dim_k(W) = \dim_k \mathrm{Im}(u) + \dim_k \mathrm{Im}(u)^\circ$ (teo. anterior). Luego, dado que $\dim_k(W) = \dim_k(W^*)$ y $\dim_k \ker({}^t u) = \dim_k \mathrm{Im}(u)^\circ$, tenemos $\dim_k \mathrm{Im}(u) = \dim_k \mathrm{Im}({}^t u)$ ■

Corolario: Sea $u : V \to W$ lineal entre k-ev. de dimensión finita. Entonces:

a) ${}^t u$ inyectiva $\Leftrightarrow$ u sobreyectiva.

b) ${}^t u$ sobreyectiva $\Leftrightarrow$ u inyectiva.

Dem: (a) es consecuencia del Teorema anterior, y (b) es consecuencia de (a) aplicado a ${}^t u$ (usando que ${}^t({}^t u) = u$). ■

Prop: Sean V y W k-ev, $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ base de V y $\mathcal{C}=(f_1,\dots,f_m)$ base de W. Sea $u: V \to W$ aplicación lineal. Entonces, la matriz de ${}^t u: W^* \to V^*$ respecto a las bases duales $\mathcal{C}^*$ y $\mathcal{B}^*$ es:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*,\mathcal{C}^*}({}^t u) = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u) \qquad \text{(matriz transpuesta)}$$

Dem: Sea $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u) \in M_{m\times n}(k)$ definida por $u(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i \rightsquigarrow A = (a_{ij})$

Luego, ${}^t u(f_i^*)(e_j) = f_i^*(u(e_j)) = \sum_{\ell=1}^{m} a_{\ell j} f_i^*(f_\ell) = a_{ij}$ y así para cada $j=1,\dots,n$ se tiene ${}^t u(f_i^*) = \sum_{j=1}^{n} {}^t u(f_i^*)(e_j)\, e_j^* = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j^*$ en V^*.

Finalmente, la matriz $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*,\mathcal{C}^*}({}^t u) \in M_{n\times m}(k)$ está definida por $B = (b_{ij})$ tq ${}^t u(f_i^*) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} e_j^*$ (cf. §4) $\Rightarrow b_{ji} = a_{ij} \Rightarrow B = {}^t A$ ✓ ■

Corolario: Sea $A \in M_{m\times n}(k)$, entonces $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^t A)$.

Dem: Considerar $u = u_A : k^n \to k^m$, $x \mapsto Ax$. Si $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{C}$) es la base canónica de k^n (resp. k^m), entonces $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u_A) = A$ y $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*,\mathcal{C}^*}({}^t u_A) = {}^t A$. Más aún, sabemos que $\mathrm{rg}(u_A) = \mathrm{rg}({}^t u_A) \Leftrightarrow \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^t A)$ ■

Ejercicio Sea V un k-ev. de dimensión n, $\mathcal{B}$ una base de V, y $\mathcal{B}^*$ la base dual de V^*:

① Sea $\mathcal{C}$ otra base de V, $\mathcal{C}^*$ la base dual de V^* y sea $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ la matriz de cambio de base (cf. §5). Determinar la matriz $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*}(\mathcal{C}^*)$ en términos de P.

② Probar que para toda base $\mathcal{D}$ de V^*, existe una única base $\mathcal{B}$ de V tal que $\mathcal{B}^* = \mathcal{D}$. (Se dice que $\mathcal{B}$ es la base predual de $\mathcal{D}$).

§29. Formas bilineales y formas cuadráticas

⚠ En todo lo que sigue, supondremos que k es un cuerpo con $\mathrm{car}(k) \neq 2$ (eg. $k = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).

Def: Sea V un k-ev. Una forma bilineal sobre V es una forma 2-multilineal (ver §9), ie, es una aplicación $B: V\times V \to k$ que cumple:

(a) Para todo $y \in V$ fijo: La aplicación $B^y : V \to k$, $x \mapsto B(x,y)$ es una forma lineal.

(b) Para todo $x \in V$ fijo: La aplicación ${}^x B : V \to k$, $y \mapsto B(x,y)$ es una forma lineal.

Obs: Explícitamente, $B: V\times V \to k$ es bilineal si $\forall x,y,z \in V$ y $\forall \lambda \in k$ se tiene $B(\lambda x, y) = B(x,\lambda y) = \lambda B(x,y)$; $B(x+y,z) = B(x,z)+B(y,z)$; $B(x,y+z) = B(x,y)+B(x,z)$

Ejemplo: $B((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ es bilineal en k^n.

⚠ Si $W = V\times V$, entonces $B: W \to k$ no es necesariamente lineal (sólo es lineal en cada variable!).