§27. Espacios vectoriales cocientes

Motivación: Sabemos que si $f: V \to W$ es una aplicación lineal entre dos k-e.v. entonces $\ker(f) \subseteq V$ es un sub-e.v. de V. ¿Será cierto que todo sub-e.v. de V es el núcleo de alguna aplicación lineal? ¿Unicidad?

Sea $K := \ker(f) \subseteq V$ y consideremos $w \in \mathrm{Im}(f) \subseteq W$, ie, $w \in W$ tq existe $v \in V$ con $f(v) = w$. Si $v' \in V$ también cumple $f(v') = w$ entonces tenemos $f(v) = f(v') \iff v - v' \in K$. Luego, podemos definir la relación de equivalencia $v \sim v' \overset{\text{def}}{\iff} v - v' \in K$ $\quad (\iff f(v) = f(v'))$ en V.

Así, cada elemento $w \in \mathrm{Im}(f) \subseteq W$ se identifica a una única clase de equivalencia

$$[v] = \{v' \in V \text{ tq } v \sim v'\} = \{v' \in V \text{ tq } v - v' \in K\} =: v \bmod K$$
$$= \{v + x \,;\, x \in K\} =: v + K,$$

donde $v \in V$ es cualquier vector tq $f(v) = w$.

Generalizaremos esta construcción a todo sub-e.v. $U \subseteq V$ y construiremos de manera "canónica" un k-e.v. denotado V/U, y llamado el cociente de V por U, junto a una aplicación lineal $\pi: V \twoheadrightarrow V/U$ tq $\ker(\pi) = U$, llamada proyección canónica.

Intuitivamente, trabajar sobre V/U nos permite "ignorar" los elementos de U y por ende simplificar muchas situaciones (veremos que esto es útil al hacer demostraciones por inducción en la dimensión, por ejemplo). Esto último es análogo al hecho que es más fácil hacer cálculos "módulo n" que en $\mathbb{Z}$ (eg. módulo 7 se tiene $3^{2010} \equiv 9^{1005} \equiv 2^{1005} \equiv 8^{335} \equiv 1 \bmod 7$ sin tener que calcular 3^{2010} explícitamente !).

Def: Sea $(A,+)$ un grupo abeliano (ie, conmutativo) y $B \subseteq A$ sub-conj. Decimos que B es un subgrupo de A si:

a) $0 \in B$.

b) Para todos $b_1, b_2 \in B$ se tiene $b_1 + b_2 \in B$.

c) Para todo $b \in B$ se tiene $-b \in B$.

Ejemplos: ① El conjunto $n\mathbb{Z} = \{kn, k \in \mathbb{Z}\}$ de múltiplos de $n \in \mathbb{N}$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z},+)$.

② Sea V un k-e.v. Entonces todo sub-e.v. $W \subseteq V$ es un subgrupo de $(V,+)$. (que además cumple con ser estable por multiplicación por escalares).

Sea A un grupo abeliano y $B \subseteq A$ un sub-grupo. Definimos en A la relación de equivalencia $\sim_B$ mediante: $x \sim_B y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x - y \in B$.

Para todo $a \in A$ denotamos por

$$[a] := \{ b \in A \text{ tq } b - a \in B \} = \{ a + x \}_{x \in B} =: a \pmod B =: a + B$$

su clase de equivalencia, y por A/B al conjunto cociente (ie, el conjunto cuyos elementos son todas las clases de equivalencia). Denotamos por

$$\begin{aligned} \pi : A &\longrightarrow A/B \\ a &\longmapsto [a] = a + B \end{aligned} \qquad \text{("\underline{proyección canónica}")}$$

la función que a todo $a \in A$ le asocia su clase $[a]$.

<u>Prop</u>: Sea A grupo abeliano y $B \subseteq A$ sub-grupo. Entonces, el cociente A/B admite una única estructura de grupo abeliano tq la proyección canónica $\pi : A \to A/B$ es un <u>morfismo de grupos</u>, ie,

$$\pi(a+b) = \pi(a) + \pi(b) \qquad \text{para todos } a, b \in A.$$

<u>Dem</u>: La condición sobre π implica que en A/B se tiene que

$$[a] + [b] = (a+B) + (b+B) = \pi(a) + \pi(b) = \pi(a+b) = a + b + B = [a+b].$$

Luego, nos gustaría definir $[a] + [b] := [a+b]$. Sin embargo, la clase de equivalencia <u>no</u> determina únicamente el elemento $a \in A$: en efecto, si $a \sim_B a'$ entonces $[a] = [a']$. Luego, tenemos que probar que la expresión $[a+b] =: [a] + [b]$ <u>no</u> depende en los "representantes" $a, b \in A$:

Sean $a', b' \in A$ tales que $a \sim_B a'$ y $b \sim_B b'$, ie, $\exists\, x, y \in B$ tales que $a' = a + x$ y $b' = b + y$. Como $(A, +)$ es un grupo abeliano, tenemos:

$$a' + b' = (a+x) + (b+y) = a + b + \underbrace{(x+y)}_{\in B} \overset{\text{def}}{\Longrightarrow} (a+b) \sim_B (a'+b').$$

Así, $[a+b] =: [a] + [b] = [a'] + [b'] := [a'+b']$ <u>bien definida</u> ✓

En part, la suma en A/B es asociativa y conmutativa, y admite un elemento neutro dado por $[0] = 0 + B = B$. Finalmente, para todo $a \in A$, la clase $[-a] = -a + B$ es el opuesto de $[a] = a + B$. ■

<u>Ejemplo</u>: Si $A = (\mathbb{Z}, +)$ y $B = n\mathbb{Z}$ entonces $x \sim_B y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x \equiv y \pmod n$ y $A/B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

<u>Obs</u>: Dado que para todo $a \in A$ se tiene que $a \in [a]$, tenemos que la proyección canónica $\pi : A \twoheadrightarrow A/B$ es siempre <u>sobreyectiva</u>.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Determinar cuándo $\pi : A \to A/B$ es inyectiva.

Teorema: Sea V un $\Bbbk$-e.v. y $\mathcal{U} \subseteq V$ un sub-e.v. Entonces:

① El grupo abeliano $V/\mathcal{U}$ puede ser dotado de una única estructura de $\Bbbk$-e.v. tq la proyección $\pi : V \to V/\mathcal{U}$ es lineal: para todos $\lambda \in \Bbbk$ y $v \in V$ se tiene $\pi(\lambda v) = \lambda \pi(v)$. Decimos que $V/\mathcal{U}$ es el espacio vectorial cociente de V por $\mathcal{U}$.

② Si V es de dimensión finita, $\dim_{\Bbbk}(V/\mathcal{U}) = \dim_{\Bbbk}(V) - \dim_{\Bbbk}(\mathcal{U})$.

③ Si V es de dimensión finita y $W \subseteq V$ es un suplementario de $\mathcal{U}$ (ie, $V = \mathcal{U} \oplus W$) entonces $\pi|_W : W \xrightarrow{\sim} V/\mathcal{U}$ es un isomorfismo. En part, si $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_d)$ es una base de W, con $d = \dim_{\Bbbk}(V) - \dim_{\Bbbk}(\mathcal{U})$, entonces $\pi(\mathcal{C}) = (\pi(w_1), \dots, \pi(w_d))$ es una base de $V/\mathcal{U}$.

Dem: ① Ya sabemos que $\pi(v+v') = \pi(v) + \pi(v') \iff v + v' + \mathcal{U} = (v+\mathcal{U}) + (v'+\mathcal{U})$. Por lo que basta verificar que para todo $\lambda \in \Bbbk$ y $v \in V$ la expresión

$$\lambda \pi(v) = \lambda(v+\mathcal{U}) := \pi(\lambda v) = \lambda v + \mathcal{U}$$

está bien definida: sea $v' \in V$ tq $v \underset{\mathcal{U}}{\sim} v'$ (ie, $v - v' \in \mathcal{U}$) y sea $x \in \mathcal{U}$ tq $v' = v + x \Rightarrow \lambda v' = \lambda v + \lambda x$. Dado que $\mathcal{U}$ es un sub-e.v. $\lambda x \in \mathcal{U}$ y luego $\lambda v \underset{\mathcal{U}}{\sim} \lambda v'$. Así, $\lambda \cdot [v] := [\lambda v] = [\lambda v'] =: \lambda [v']$ bien definida ✓

② La aplicación lineal $\pi : V \twoheadrightarrow V/\mathcal{U}$ es sobreyectiva, y además

$$\ker(\pi) = \pi^{-1}([0]) = \pi^{-1}(0+\mathcal{U}) = \{v \in V \text{ tq } v - 0 \in \mathcal{U}\} = \mathcal{U}.$$

Luego, si V es de dimensión finita, el teorema del rango implica:

$$\dim_{\Bbbk}(V) = \dim_{\Bbbk} \ker(\pi) + rg(\pi) = \dim_{\Bbbk}(\mathcal{U}) + \dim_{\Bbbk}(V/\mathcal{U}) \checkmark$$

③ Sea $\pi_W = \pi|_W : W \to V/\mathcal{U}$ la restricción de π a $W \subseteq V$.

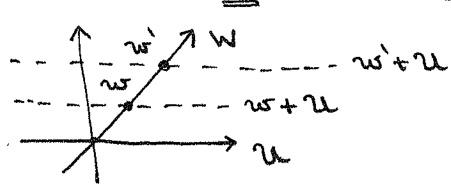
$\Rightarrow \ker(\pi_W) = \ker(\pi) \cap W = \mathcal{U} \cap W = \{0\}$, pues $V = \mathcal{U} \oplus W$.

$\Rightarrow \pi_W : W \hookrightarrow V/\mathcal{U}$ inyectiva. Por otra parte, todo $x \in V/\mathcal{U}$ es igual a $\pi(v)$ para cierto $v \in V$. Dado que $V = \mathcal{U} \oplus W$ existen únicos $u \in \mathcal{U}$ y $w \in W$ tq $v = u + w \Rightarrow \pi(v) = \underbrace{\pi(u)}_{=0} + \pi(w) = \pi(w)$, ie, $x = \pi_W(w)$

$\Rightarrow \pi_W : W \twoheadrightarrow V/\mathcal{U}$ sobreyectiva y luego un isomorfismo. En part, la imagen por π de cualquier base de W es una base de $V/\mathcal{U}$. ■

Ejercicio Sea $V = \mathbb{R}^2$ y $\mathcal{U} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(e_1)$ eje x, describir el cociente $V/\mathcal{U}$.

Obs: El suplementario $W \subseteq V$ no es único (ie, el isomorfismo $W \cong V/\mathcal{U}$ no es "canónico").



El siguiente resultado, llamado la <u>propiedad universal</u> del cociente, permite caracterizar al cociente y a la proyección canónica:

<u>Teorema</u> (propiedad universal): Sea V un $\Bbbk$-e.v, $\mathcal{U} \subseteq V$ un sub-e.v y sea $f: V \to W$ una aplicación lineal tal que $\mathcal{U} \subseteq \ker(f)$. Entonces, existe una <u>única</u> aplicación lineal $\hat{f}: V/\mathcal{U} \to W$ tal que $f = \hat{f} \circ \pi$, donde $\pi: V \to V/\mathcal{U}$ es la proyección canónica. En otras palabras, el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & W \\ V/\mathcal{U} \arrow[ur, dotted, "\exists!\,\hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

<u>Dem</u>: Si existiera $\hat{f}: V/\mathcal{U} \to W$ tq $f = \hat{f} \circ \pi$ entonces la única forma de definir $\hat{f}$ es mediante $f(v) = \hat{f}(\pi(v)) = \hat{f}([v])$. Luego, basta ver que esto último está bien definido: Sea $v' \in V$ tq $\pi(v) = \pi(v')$, ie, $v - v' \in \mathcal{U}$. Sea $x \in \mathcal{U}$ tq $v' = v + x \Rightarrow f(v') = f(v) + f(x) = f(v)$ pues $x \in \mathcal{U} \subseteq \ker(f)$. Luego, $\hat{f}: V/\mathcal{U} \to W$, $[v] \mapsto f(v)$ bien definida ✓
Más aún, para todos $v, v' \in V$ y $\lambda \in \Bbbk$ se tiene
$$\hat{f}(\lambda[v] + [v']) = \hat{f}([\lambda v + v']) = f(\lambda v + v') = \lambda f(v) + v' = \lambda \hat{f}([v]) + \hat{f}([v'])$$
$\Rightarrow \hat{f}$ es una aplicación lineal. ∎

Una consecuencia de lo anterior es el llamado "Teorema del Isomorfismo" de Emmy Noether (1882-1935):

<u>Teorema</u> (Noether, 1927): Sean V, W $\Bbbk$-e.v. y $f: V \to W$ lineal. Entonces f induce un isomorfismo de espacios vectoriales
$$\hat{f}: V/\ker(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(f).$$

<u>Dem</u>: Podemos reemplazar $f: V \to W$ por la aplicación lineal <u>sobreyectiva</u> $f: V \to \mathrm{Im}(f)$. Luego, la propiedad universal del cociente (aplicada a $\mathcal{U} = \ker(f)$) implica que $\exists!\ \hat{f}: V/\ker(f) \to \mathrm{Im}(f)$ tal que $\hat{f}([v]) = f(v)$ para todo $v \in V$. En part, f sobreyectiva $\Rightarrow \hat{f}$ sobreyectiva ✓
Veamos que $\hat{f}$ es inyectiva: sea $x \in \ker(\hat{f})$ y sea $v \in V$ tq $\pi(v) = [v] = x$.
$\Rightarrow 0 = \hat{f}([v]) = f(v) \Rightarrow v \in \ker(f)$, ie, $x = 0$ en el cociente $V/\ker(f)$ (!) ✓ ∎

El siguiente resultado establece una conexión entre los espacios cocientes y las matrices triangulares por bloques:

Prop: Sea V un $\Bbbk$-e.v. de $\dim_{\Bbbk}(V) = n$. Sea $u : V \to V$ endomorfismo y sea $\mathcal{U} \subseteq V$ un sub-e.v. estable por u (i.e., $u(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$). Denotemos por $u_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ la restricción $u|_{\mathcal{U}}$ y por $\pi : V \to V/\mathcal{U}$ la proyección canónica. Entonces:

① se induce un endomorfismo $\hat{u} := u_{V/\mathcal{U}} : V/\mathcal{U} \to V/\mathcal{U}$ tal que $u_{V/\mathcal{U}}(\pi(v)) = \pi(u(v))$ para todo $v \in V$.

② Sea $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de V tq $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_r)$ es una base de $\mathcal{U}$. Entonces:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array}\right) \quad \text{(triangular superior por bloques).}$$

donde $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u_{\mathcal{U}})$, $B \in M_{r, n-r}(\Bbbk)$ y $D \in M_{n-r}(\Bbbk)$. Más aún, D es la matriz de $u_{V/\mathcal{U}}$ respecto a la base $\mathcal{D} = (\pi(e_{r+1}), \dots, \pi(e_n))$ de $V/\mathcal{U}$.

③ Tenemos que $P_u(X) = P_{u_{\mathcal{U}}}(X)\, P_{u_{V/\mathcal{U}}}(X)$ en $\Bbbk[X]$.

Dem: ① Como $u(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$, tenemos que $(\pi \circ u)(\mathcal{U}) = \{0\}$ y luego la propiedad universal asegura la existencia de $\hat{u}$ (i.e., consideramos $f = \pi \circ u : V \to V/\mathcal{U}$):

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] & V \arrow[d, "\pi"] \\ V/\mathcal{U} \arrow[r, dashed, "\exists!\, \hat{f} = \hat{u}"'] & V/\mathcal{U} \end{tikzcd}$$

($f = \pi \circ u$ cumple $\mathcal{U} \subseteq \ker(f)$)

$\Rightarrow \hat{u}([v]) = f(v) \iff \hat{u}(\pi(v)) = \pi(u(v))$

② Sabemos que si $\mathcal{U} = \mathrm{Vect}_{\Bbbk}(e_1, \dots, e_r)$ es estable por u, entonces $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ tiene la forma indicada. Más aún, si escribimos $B = (b_{ij})$ y $D = (d_{lj})$ donde $i = 1, \dots, r$ y $j, l = 1, \dots, n-r$, entonces:

$$u(e_{r+j}) = \sum_{i=1}^{r} b_{ij} e_i + \sum_{l=1}^{r} d_{lj}\, e_{r+l}$$

$\Rightarrow \hat{u}(\pi(e_{r+j})) = \pi(u(e_{r+j})) = \sum_{l=1}^{r} d_{lj}\, \pi(e_{r+l})$ para $j = 1, \dots, n-r$, i.e., D es la matriz de $\hat{u}$ resp. a la base $\mathcal{D} = (\pi(e_{r+1}), \dots, \pi(e_n))$ de $V/\mathcal{U}$. ✓

③ Finalmente, $P_u(X) = P_M(X) = P_A(X) \cdot P_D(X) = P_{u_{\mathcal{U}}}(X) \cdot P_{u_{V/\mathcal{U}}}(X)$ ✓ ∎

Obs: Si consideramos V de dimensión <u>finita</u> y $\mathcal{U} \subseteq V$ sub-e.v. <u>no-nulo</u> $\Rightarrow \dim_{\Bbbk}(V/\mathcal{U}) = \dim_{\Bbbk}(V) - \dim_{\Bbbk}(\mathcal{U}) < \dim_{\Bbbk}(V)$. Luego, considerar cocientes es muchas veces útil para realizar demostraciones por inducción en la dimensión.

Ejercicio Sea $f : V \to W$ lineal y $\mathcal{U} \subseteq V$ sub-e.v. Sea $T := \mathrm{Im}(u|_{\mathcal{U}}) = u(\mathcal{U})$ sub-e.v de W. Probar que f induce una aplicación lineal

$$\hat{g} : V/\mathcal{U} \to W/T.$$

y describirla en términos de $f : V \to W$, $\pi_{\mathcal{U}} : V \to V/\mathcal{U}$ y $\pi_T : W \to W/T$.

(<u>Obs</u>: De hecho, basta que $T \subseteq W$ sub-e.v cumpla $u(\mathcal{U}) \subseteq T$).