§26. Sistemas y EDO lineales con coeficientes constantes

Motivación: Sea $a \in \mathbb{C}$. Resolver la Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) $x' = ax$ significa encontrar una función derivable $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tq para todo $t \in \mathbb{R}$ se cumpla $f'(t) = a f(t)$.

Por ejemplo, $f(t) = Ce^{at}$ donde $C \in \mathbb{C}$ constante, verifica $f'(t) = aCe^{at} = af(t)$ ✓

Por otra parte, si $g(t)$ es una solución de $x' = ax$ y definimos la función $F(t) := g(t)e^{-at}$ entonces: $F'(t) = g'(t)e^{-at} - ag(t)e^{-at} = (g'(t) - ag(t))e^{-at} = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow F(t) = C$ es constante, ie, $g(t) = Ce^{at}$.

El objetivo de esta sección es generalizar el cálculo anterior:

Def: Un <u>sistema diferencial lineal</u> (homogéneo) con coeficientes constantes es un sistema de la forma

$$(S) \begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) \end{cases}$$

donde los $a_{ij} \in \mathbb{C}$ son constantes y las funciones derivables $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ son las incógnitas.

⚠ El sistema (S) es equivalente a $X'(t) = AX(t)$, donde $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ y $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$.

Teorema: Las soluciones de (S) son las funciones de la forma $X(t) = e^{tA}X_0$, donde $X_0 \in \mathbb{C}^n$. El conjunto de soluciones es un $\mathbb{C}$-e.v. de dimensión n.

Dem: Veamos que toda función de la forma $X(t) = e^{tA}X_0$ es solución de (S): La fórmula para la derivada de un producto de matrices implica que

$$X'(t) = Ae^{tA}X_0 + e^{tA} \cdot 0 = Ae^{tA}X_0 = AX'(t) \quad ✓$$

Por otra parte, si $X(t)$ es una solución de (S), definimos la función

$$F(t) := e^{-tA}X(t) \Rightarrow F'(t) = -Ae^{-tA}X(t) + e^{-tA}X'(t)$$
$$= -e^{-tA}AX(t) + e^{-tA}X'(t)$$
$$= e^{-tA}(AX(t) - X'(t)) = 0$$

Luego, $F(t) = C \in \mathbb{C}^n$ constante. En part, $C = F(0) = X(0)$.

$\Rightarrow e^{-tA}X(t) = X(0)$. Dado que $e^{-tA} \in GL_n(\mathbb{C})$ y $(e^{-tA})^{-1} = e^{tA}$, obtenemos $X(t) = e^{tA}X(0)$ ✓

Sea $V = \{X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n \text{ derivable tq } X' = AX\}$ conj. de soluciones de (S). Entonces, la aplicación $\varphi : \mathbb{C}^n \to V$ dada por $\varphi(X_0) := e^{tA}X_0$ es lineal e inyectiva, con inversa dada por $X \mapsto X(0) \in \mathbb{C}^n$. Luego, $V \cong \mathbb{C}^n$. ∎

<u>Corolario</u>: Sean $X_0 \in \mathbb{C}^n$ y $t_0 \in \mathbb{R}$. La función $X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0$ es la <u>única</u> solución de (S) que verifica $X(t_0) = X_0$.

<u>Dem</u>: La función $X(t) = e^{tA}\left(e^{-t_0 A} X_0\right)$ es solución de (S) gracias al Teorema anterior, y ella verifica $X(t_0) = e^{0_n} X_0 = I_n X_0 = X_0$ ✓

Por otro lado, si $Y(t)$ es una solución de (S) tq $Y(t_0) = X_0$, entonces la función $Y(t+t_0)$ es solución de (S) y vale X_0 en $t=0$. La demostración del Teorema anterior implica que $Y(t+t_0) = e^{tA} X_0$, ie, $Y(t) = e^{(t-t_0)A} X_0$ ✓ ∎

Nos gustaría tener una descripción más explícita de las soluciones de (S). Veamos primero el caso más simple: A diagonalizable.

<u>Teorema</u>: Supongamos que existe una base $(v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{C}^n$ formada por vectores propios de A asociados a valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (no necesariamente distintos), ie, A es diagonalizable. Entonces, las soluciones de (S) son de la forma

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n.$$

donde $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ son constantes.

<u>Dem</u>: Toda "condición inicial" $X_0 \in \mathbb{C}^n$ se escribe como $X_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j v_j$. Luego, si $P \in GL_n(\mathbb{C})$ es la matriz de cambio de base de la base canónica a la base $(v_1, \dots, v_n)$, entonces $X_0 = P \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

Por otro lado, $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ matriz diagonal.

$$\Rightarrow e^{tA} X_0 = P e^{tD} P^{-1} X_0 = P e^{tD} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{t\lambda_j} v_j \quad ✓$$

(Otra forma: En la base $(v_1, \dots, v_n)$ el sistema (S) se reduce a $y_j' = \lambda_j y_j$; $j = 1, \dots, n$) ∎

<u>Ejemplo</u>: Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x_1' = 2x_2 - 2x_3 \\ x_2' = -2x_1 + x_3 \\ x_3' = 2x_1 - x_2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ $P_A(X) = X^3 + 9X = X(X+3i)(X-3i)$ y los vectores propios $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1+3i \\ -1-3i \end{pmatrix}$ y $v_3 = \overline{v_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1-3i \\ -1+3i \end{pmatrix}$ están asociados a $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3i$ y $\lambda_3 = \overline{\lambda_2} = -3i$.

Luego, las soluciones complejas del sistema son

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 + 4c_2 e^{3it} + 4c_3 e^{-3it} \\ x_2(t) = 2c_1 + (-1+3i) c_2 e^{3it} + (-1-3i) c_3 e^{-3it} \\ x_3(t) = 2c_1 + (-1-3i) c_2 e^{3it} + (-1+3i) c_3 e^{-3it} \end{cases}$$

donde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$, ie, una base del espacio de soluciones está dada por

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1+3i \\ -1-3i \end{pmatrix} e^{3it}, \quad X_3(t) = \overline{X_2(t)} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1-3i \\ -1+3i \end{pmatrix} e^{-3it}.$$

⚠ Para encontrar soluciones reales del sistema, notamos que las soluciones $X_1(t)$, $(X_2(t)+X_3(t))/2 = \mathrm{Re}(X_2)(t)$ y $(X_2(t)-X_3(t))/2i = \mathrm{Im}(X_2)(t)$ son reales y linealmente independientes. Luego, toda solución real es combinación lineal con coeficientes reales de

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Re}(X_2)(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(3t), \quad \mathrm{Im}(X_2)(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \sin(3t).$$

Veamos ahora el caso general. Como siempre, si λ_j es un valor propio de A entonces n_j es su multiplicidad como raíz del polinomio característico P_A y m_j su multiplicidad como raíz del polinomio minimal m_A, es decir,

$$m_A(X) = \prod_{j=1}^{p} (X-\lambda_j)^{m_j} \quad \text{y} \quad P_A(X) = \prod_{j=1}^{p} (X-\lambda_j)^{n_j}.$$

Más aún, $0 < m_j \leq n_j$ (Cayley-Hamilton).

<u>Teorema</u>: Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ los valores propios (distintos) de A y sean $m_1, \dots, m_p$ sus multiplicidades como raíces del polinomio minimal m_A. Entonces, las soluciones de (S) son de la forma

$$X(t) = e^{\lambda_1 t} P_1(t) + \dots + e^{\lambda_p t} P_p(t),$$

donde $P_j(t)$ es una función (vectorial) polinomial de grado $< m_j$ con valores en el espacio característico $V_{(\lambda_j)}$ asociado al valor propio λ_j.

<u>Dem</u>: Recordemos que $V_{(\lambda_j)} = \ker\left[(A-\lambda_j I_n)^{m_j}\right]$ y que $\mathbb{C}^n = V_{(\lambda_1)} \oplus \dots \oplus V_{(\lambda_p)}$. Por otra parte, toda solución $X(t)$ de (S) es de la forma $X(t) = e^{tA} X_0$ para cierto $X_0 \in \mathbb{C}^n$. Escribamos $X_0 = v_1 + \dots + v_p$ para únicos vectores $v_j \in V_{(\lambda_j)}$. Notar que $e^{tA} v_j = e^{\lambda_j t} e^{(A-\lambda_j I_n)t} v_j$ y luego, dado que $(A-\lambda_j I_n)^{m_j}$ anula todo vector $v_j \in V_{(\lambda_j)}$, deducimos que:

$$e^{tA} v_j = e^{\lambda_j t} \sum_{k=0}^{m_j-1} \frac{((A-\lambda_j I_n)t)^k}{k!} v_j$$

$$\Rightarrow X(t) = \sum_{j=1}^{p} e^{\lambda_j t} P_j(t), \quad \text{donde } P_j(t) = \sum_{k=0}^{m_j-1} \frac{t^k}{k!} (A-\lambda_j I_n)^k v_j. \quad \blacksquare$$

<u>Obs</u>: A diagonalizable $\Leftrightarrow$ $m_j = 1$ para todo j. En part, $V_{(\lambda_j)} = V_{\lambda_j}$ y $P_j(t)$ es un polinomio constante con valores en V_{λ_j} (cf. Teorema en pág. 76).

<u>Ejemplo</u>: Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ x_2' = 10x_1 - 5x_2 + 7x_3 \\ x_3' = 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Vimos (Ejemplo en §22, pág 53) que $P_A(X) = X^2(X+1)$ y luego $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 0$ son sus valores propios. Además, $V_{\lambda_1} = V_{(\lambda_1)} = \ker(A+I_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(v_1)$ con $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

y $V_{\lambda_2} = \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(v_2)$ y $V_{(\lambda_2)} = \ker(A^2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(v_2, v_3)$ con $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

<u>Método 1</u>: Gracias a (la demostración del) Teorema anterior, tenemos que una base para el espacio de soluciones del sistema está dado por:

$$X_1(t) = \underbrace{e^{\lambda_1 t} v_1}_{= e^{tA} v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad X_2(t) = \underbrace{e^{\lambda_2 t} v_2}_{= e^{tA} v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X_3(t) = e^{tA} v_3 = \underbrace{e^{\lambda_2 t}}_{=1} (v_3 + t \underbrace{A v_3}_{v_2}) = \begin{pmatrix} t \\ 2t+1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, la solución general del sistema es

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{-t} + c_2 + c_3 t \\ x_2(t) = -c_1 e^{-t} + 2c_2 + c_3(2t+1) \\ x_3(t) = -2c_1 e^{-t} + c_3 \end{cases}$$

<u>Método 2</u>: Calcular explícitamente $X(t) = e^{tA} X_0$: Dado que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ es una base, escribimos $X_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 \Rightarrow X_0 = P \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ con $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Más aún, $P^{-1} A P = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = J$ forma canónica de Jordan.

$$\Rightarrow e^{tA} = P e^{tJ} P^{-1}, \quad \text{donde} \quad e^{tJ} = \left(\begin{array}{c|cc} e^{(-1)t} & & \\ \hline & e^{0 t} & e^{0t}\cdot t \\ & 0 & e^{0t} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} e^{-t} & & \\ \hline & 1 & t \\ & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{pmatrix} \text{cf. Lema útil} \\ \text{en §25,} \\ \text{pág. 71} \end{pmatrix}$$

Luego, $e^{tA} X_0 = P e^{tJ} P^{-1} X_0 = P e^{tJ} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 + c_3 t \\ c_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{-t} + c_2 + c_3 t \\ x_2(t) = -c_1 e^{-t} + 2c_2 + 2c_3 t + c_3 = -c_1 e^{-t} + 2c_2 + c_3(2t+1). \\ x_3(t) = -2c_1 e^{-t} + c_3 \end{cases}$$

<u>Ejemplo</u>: Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x_1' = -4x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2' = x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x_3' = -2x_1 + x_2 - x_3 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Vimos (Ejemplo en §25, pág 71) que $P_A(X) = (X+2)^3$ y luego $\lambda = -2$ es el único valor propio de A. Las soluciones del sistema están dadas por $X(t) = e^{tA} X_0$.
Dado que $(A + 2I_3)^3 = 0$ (Cayley-Hamilton), tenemos que:

$$e^{tA} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dunford}}}{=} e^{-2I_3 t} e^{(A+2I_3)t} = e^{-2t} \left(I_3 + (A+2I_3)t + \tfrac{1}{2} t^2 (A+2I_3)^2 \right)$$

Dado que $A + 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $(A+2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ obtenemos

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{-2t} \left[\left(1 - 2t + \frac{3t^2}{2}\right) c_1 + t c_2 + \left(t - \frac{3t^2}{2}\right) c_3 \right] \\ x_2(t) = e^{-2t} \left[\left(t + \frac{3t^2}{2}\right) c_1 + (1+t) c_2 - \left(2t + \frac{3t^2}{2}\right) c_3 \right] \\ x_3(t) = e^{-2t} \left[\left(-2t + \frac{3t^2}{2}\right) c_1 + t c_2 + \left(1 + t - \frac{3t^2}{2}\right) c_3 \right] \end{cases}$$

⚠ Consejos prácticos: Para resolver el sistema diferencial $X'(t) = AX(t)$:

① Primero que todo, calculamos los valores y vectores propios de A. Si los vectores propios forman una base (i.e, A es diagonalizable) entonces el Teorema en pág 76 nos da la solución.

② Si A no es diagonalizable pero sólo posee un valor propio λ, entonces

$$e^{tA} \underset{\text{Dunford}}{=} e^{\lambda t} e^{t(A-\lambda I_n)} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} (A-\lambda I_n)^k \frac{t^k}{k!}$$

③ Si A no es diagonalizable y posee varios valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ con multiplicidades algebraicas $n_1, \dots, n_p$ entonces:

ⓐ Podemos buscar para cada λ_j un polinomio de grado $< n_j$, $P_j(t)$, tal que $e^{\lambda_j t} P_j(t)$ sea solución del sistema (obtendremos al reemplazar un sistema lineal en los coeficientes de P_j).

(Obs: De hecho, el Teorema en pág 77 nos dice que basta considerar P_j de grado $< m_j$, la multiplicidad de λ_j en el polinomio minimal m_A)

ⓑ Podemos buscar una base $(v_j^1, v_j^2, \dots)$ de $V_{(\lambda_j)} = \ker[(A-\lambda_j I_n)^{n_j}]$ de tal suerte que $v_j^l \in \ker[(A-\lambda_j I_n)^l]$ y luego calcular $e^{tA} v_j^l$ como en ②.

(Obs: Un caso particular típico es $n_j = 2$, en cuyo caso hay que encontrar v_j vector propio y v_j' vector propio generalizado en $\ker[(A-\lambda_j I_n)^2]$ tq v_j y v_j' sean l.i. En este caso obtenemos soluciones

$$X_j(t) = e^{\lambda_j t} v_j \quad \text{y} \quad X_j'(t) = e^{\lambda_j t}[v_j' + t(A-\lambda_j I_n)v_j'].)$$

ⓒ Podemos calcular la forma canónica de Jordan de $A = PJP^{-1}$ y obtener e^{tJ} usando la Proposición en pág. 72.

(Obs: Vale la pena señalar que no es necesario calcular la inversa P^{-1} para encontrar la solución general (cf. "Método 2" en pág. 78).)

④ Si la matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ tiene coeficientes reales sus valores propios pueden agruparse en valores propios reales $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ y en pares conjugados de valores propios complejos $\mu_1, \overline{\mu_1}, \dots, \mu_q, \overline{\mu_q} \in \mathbb{C}$. Es importante (para ahorrar cálculos) recordar que espacios propios / característicos de valores propios conjugados son también conjugados. Luego, las soluciones del sistema serán del tipo $X_1(t), \dots, X_p(t), Y_1(t), \overline{Y_1(t)}, \dots, Y_q(t), \overline{Y_q(t)}$, con $X_j(t)$ real. Así, una base de soluciones reales es:

$$X_1(t), \dots, X_p(t), (\operatorname{Re} Y_1)(t), (\operatorname{Im} Y_1)(t), \dots, (\operatorname{Re} Y_q)(t), (\operatorname{Im} Y_q)(t).$$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Resolver el sistema diferencial

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -4x - 3y \end{cases}$$

Def: Una EDO homogenea lineal de orden n con coeficientes constantes es

(E) $\quad x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0$,

donde los $a_j \in \mathbb{C}$ son constantes y $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es una función n-veces derivable.

Si definimos $x_0 := x$, $x_1 = x'$, $x_2 = x''$, $\ldots$, $x_{n-1} = x^{(n-1)}$ entonces (E) $\Leftrightarrow \underbrace{X'(t) = AX(t)}$

donde $X(t) = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

¡Podemos aplicar los resultados anteriores!

Luego, el conjunto de soluciones de (E) es un $\mathbb{C}$-e.v. de dimensión n.
Más aún, vimos (cf. §22, pág. 55) que $P_A(X) = m_A(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$, por lo que P_A es el "polinomio característico de (E)" y "$P_A(\lambda) = 0$" es la ecuación característica de (E).

Teorema: Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ las raíces (distintas) de la ecuación característica y sean $n_1, \ldots, n_p$ sus multiplicidades. Entonces, las soluciones de (E) son todas las funciones de la forma

$$x(t) = Q_1(t)\,e^{\lambda_1 t} + \ldots + Q_p(t)\,e^{\lambda_p t},$$

donde $Q_j \in \mathbb{C}[t]$ es un polinomio de grado $< n_j$.

Dem: Toda solución de $X' = AX$ es de la forma

$$X(t) = e^{\lambda_1 t} P_1(t) + \ldots + e^{\lambda_p t} P_p(t)$$

donde $P_j(t)$ es un polinomio de grado $< m_j = n_j$ (pues $m_A = P_A$). Al considerar la primera componente del vector $X(t)$, obtenemos que toda solución de (E) es de la forma $x(t) = e^{\lambda_1 t} P_{11}(t) + e^{\lambda_2 t} P_{21}(t) + \ldots + e^{\lambda_p t} P_{p1}(t)$, donde $P_{j1}(t)$ es un polinomio de grado $< n_j$. En otras palabras, el espacio de soluciones está contenido en el espacio vectorial generado por las $n = n_1 + \ldots + n_p$ funciones $t \mapsto t^k e^{\lambda_j t}$, para $0 \leq k < n_j$ y $j \in \{1, \ldots, p\}$. Como el espacio de soluciones es de dimensión n, ambos espacios son iguales. ■

Ejemplo: ① $x''' + 3x'' + 3x' + x = 0 \Rightarrow P(\lambda) = (\lambda+1)^3 = 0$ y luego las soluciones son todas las funciones $x(t) = (at^2 + bt + c)\,e^{-t}$, con $a, b, c \in \mathbb{C}$.

② $x^{(4)} + 2x'' + x = 0 \Rightarrow P(\lambda) = (\lambda^2+1)^2 = 0$ y luego las soluciones son todas las funciones $x(t) = (at+b)\,e^{it} + (ct+d)\,e^{-it}$ con $a,b,c,d \in \mathbb{C}$. En part, las soluciones reales son $x(t) = (at+b)\cos(t) + (ct+d)\sin(t)$ con $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Encontrar todas las soluciones reales de la EDO $x^{(n)} = x$.
(Obs: Tratar por separado el caso n par y el caso n impar).