§25. Exponencial de matrices:

En esta sección $k = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Def: Sea $A \in M_n(k)$. Definimos la <u>exponencial</u> de A mediante la serie
$$\exp(A) = e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \in M_n(k).$$

⚠ La exponencial e^A está bien definida pues para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene
$$\left\| \frac{A^k}{k!} \right\|_1 \leq \frac{\|A\|_1^k}{k!} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|_1^k}{k!} = e^{\|A\|_1} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$ absolutamente convergente ✓

Ejemplo: Si $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_p \end{pmatrix}$ matriz diagonal por bloques, entonces

$$A^k = \begin{pmatrix} A_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_p^k \end{pmatrix} \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \Rightarrow e^A = \begin{pmatrix} e^{A_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{A_p} \end{pmatrix}$$

En part, si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix}$ matriz diagonal $\Rightarrow e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & e^{\lambda_2} & \\ 0 & & \ddots \; e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

Ejemplo: Si $A \in M_n(k)$ es nilpotente de índice de nilpotencia $p \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, i.e., $A^p = 0$ pero $A^{p-1} \neq 0$, entonces $e^A = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{A^k}{k!} = I_n + A + \frac{1}{2}A^2 + \dots + \frac{1}{(p-1)!}A^{p-1}$.

Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ cumple $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^3 = 0$

$$\Rightarrow e^A = I_3 + A + \frac{A^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obs: Si $x, y \in \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ entonces $e^{x+y} = e^x e^y$. Esto último <u>no</u> es cierto en general para matrices: si $e^{A+B} = e^A e^B$ entonces e^A y e^B deberían conmutar (pues la suma $A+B = B+A$ es conmutativa). Sin embargo:
$$\exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \exp\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$ <u>no</u> conmutan.

Prop: Sean $A, B \in M_n(k)$ dos matrices que conmutan, i.e., $AB = BA$. Entonces:
$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A.$$

Dem: Dado que A y B conmutan, el Teorema del Binomio de Newton afirma que
$$(A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^{k-j} B^j = \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{(k-j)!\,j!} A^{k-j} B^j$$
$$\Rightarrow e^{A+B} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{k} \frac{A^{k-j}}{(k-j)!} \cdot \frac{B^j}{j!} \right)}_{=: C_k} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k$$

Visto: $\sum_{k=0}^{\infty} C_k$ converge al producto $\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{j!} \right) = e^A \cdot e^B$ ∎

Corolario: Sea $A \in M_n(k)$. Entonces $e^A \in Gl_n(k)$ y $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Dem: Aplicar la proposición a A y $B := -A$ (que conmutan), y notar que $e^{A+(-A)} = e^A \cdot e^{-A} = e^{0_n} = I_n$ ■

Prop: Sean $A, B \in M_n(k)$ dos matrices semejantes, ie, $\exists P \in Gl_n(k)$ tal que $B = P^{-1}AP$. Entonces e^A y e^B son semejantes. Más precisamente:
$$e^B = P^{-1}e^A P.$$

Dem: Notar que para todo $K \in \mathbb{N}$ se tiene
$$(P^{-1}AP)^K = (P^{-1}A\cancel{P})(\cancel{P^{-1}}A\cancel{P})\cdots(\cancel{P^{-1}}AP) = P^{-1}A^KP$$
$$\Rightarrow \sum_{K=0}^{m} \frac{(P^{-1}AP)^K}{K!} = P^{-1}\left(\sum_{K=0}^{m}\frac{A^K}{K!}\right)P \xrightarrow[m\to\infty]{} e^B = P^{-1}e^AP. \quad ■$$

Obs: La proposición anterior implica que para todo endomorfismo $u: V \to V$ de un k-e.v. V de dimensión finita (con $k = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) podemos definir $\exp(u) = e^u \in \mathrm{End}_k(V)$: es el endomorfismo asociado a $\exp(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u))$, donde $\mathcal{B}$ es cualquier base de V.

Ejercicio Sea $A \in M_n(k)$.
① Probar que $\exp({}^tA) = {}^t\exp(A)$.
② Probar que $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$.

Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P_A(X) = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$.
Luego, A es diagonalizable con valores propios $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 1$, y con vectores propios $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, respectivamente.
$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ y luego } A = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$$
$$\Rightarrow e^A = P\begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e+e^{-1} & e-e^{-1} \\ e-e^{-1} & e+e^{-1} \end{pmatrix} \checkmark$$

⚠ Importante: Incluso si $A \in M_n(\mathbb{C})$ no es diagonalizable, el polinomio $P_A \in \mathbb{C}[X]$ escinde sobre $\mathbb{C}$ y luego A admite una única descomposición de Dunford $A = S + N$ con S diagonalizable, N nilpotente y donde $SN = NS$ (¡conmutan!). Luego, $e^A = e^S e^N = e^N e^S$ donde e^S se calcula como en el ejemplo anterior y donde $e^N = I_n + N + \frac{N^2}{2} + \dots + \frac{N^{n-1}}{(n-1)!}$.

Caso particular: Si A posee sólo un valor propio λ, entonces su descomposición de Dunford es $A = \underbrace{\lambda I_n}_{S} + \underbrace{(A - \lambda I_n)}_{N}$, de donde obtenemos:

$$e^A = e^{\lambda I_m}\cdot e^{(A-\lambda I_m)} = e^{\lambda}\left(I_m + (A-\lambda I_m) + \frac{(A-\lambda I_m)^2}{2} + \dots + \frac{(A-\lambda I_m)^{m-1}}{(m-1)!}\right).$$

<u>Caso general</u>: A es semejante a una matriz diagonal por bloques, donde cada bloque posee sólo un valor propio. Basta aplicar el cálculo anterior a cada bloque.

<u>Ejemplo</u>: Sea $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

$$\Rightarrow P_A(X) = \begin{vmatrix} X+4 & -1 & -1 \\ -1 & X+1 & 2 \\ 2 & -1 & X+1 \end{vmatrix} \underset{C_3 \mapsto C_3 - C_2}{\overset{C_1 \mapsto C_1 + 2C_2}{=}} \begin{vmatrix} X+2 & -1 & 0 \\ 2X+1 & X+1 & -X+1 \\ 0 & -1 & X+2 \end{vmatrix} \underset{F_2 \mapsto F_2 + F_3}{\overset{F_1 \mapsto F_1 - F_3}{=}} \begin{vmatrix} X+2 & 0 & -(X+2) \\ 2X+1 & X & 3 \\ 0 & -1 & X+2 \end{vmatrix}$$

$$= (X+2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2X+1 & X & 3 \\ 0 & -1 & X+2 \end{vmatrix} = (X+2)\Big[\underbrace{1\cdot(X^2+2X+3) + (-1)\cdot(-2X-1)}_{(X^2+4X+4)}\Big] = (X+2)^3.$$

$\Rightarrow \lambda = -2$ es el único valor propio de A.

$\Rightarrow e^A = e^{-2I_3}\, e^{(A+2I_3)} = e^{-2}\left(I_3 + (A+2I_3) + \frac{1}{2}(A+2I_3)^2\right)$.

Calculamos $A + 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $(A+2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, de donde obtenemos

$$e^A = e^{-2}\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ 5/2 & 2 & -7/2 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Calcular e^A (cf. §22, pág. 53).

<u>Lema útil</u>: Sea $J_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in M_m(k)$ bloque de Jordan nilpotente de tamaño $m \times m$ y sea $t \in k$. Entonces:

$$\exp(tJ_m) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \cdots & t^{m-1}/(m-1)! \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & t^2/2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Dem</u>: Sea $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$ la base canónica de k^m. Entonces, $Je_1 = 0$ y $Je_i = e_{i-1}$ para $i \in \{2, \dots, m\}$. Luego, para todo $k \in \{1, \dots, m-1\}$:

$$J_m^k e_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1, \dots, k \\ e_{i-k} & \text{si } i = k+1, \dots, d. \end{cases}$$

En otras palabras, $J_m^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$, $\dots$, $J_m^{m-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$, $J_m^m = 0$.

$$\Rightarrow \exp(tJ_m) = I_m + (tJ_m) + \frac{1}{2}(tJ_m)^2 + \dots + \frac{1}{(m-1)!}(tJ_m)^{m-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & t \\ & & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & t^2/2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & t^2/2 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & t^{m-1}/(m-1)! \\ & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \qquad \blacksquare$$

Prop: Sean $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y $\lambda, t \in k$. Si consideramos el bloque de Jordan de tamaño m asociado a λ, ie, $J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \in M_m(k)$. Entonces:

$$\exp(t J_m(\lambda)) = e^{\lambda t}\left(I_m + t J_m + \frac{t^2}{2} J_m^2 + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} J_m^{m-1}\right) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \cdots & t^{m-1}/(m-1)! \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & t^2/2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En part, para toda matriz de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_{m_p}(\lambda_p) \end{pmatrix} \quad \text{se tiene} \quad \exp(tJ) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t}\exp(t J_{m_1}) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_p t}\exp(t J_{m_p}) \end{pmatrix}.$$

Dem: La descomposición de Dunford de $J_m(\lambda)$ es $J_m(\lambda) = \lambda I_m + J_m$.
$\Rightarrow \exp(t J_m(\lambda)) = \exp(\lambda t I_m) \cdot \exp(t J_m) = e^{\lambda t} \exp(t J_m)$, por lo que la primera parte sigue gracias al Lema útil. La última parte se obtiene al considerar cada bloque de Jordan por separado, y usar la primera parte. ■

Terminemos esta sección estudiando la continuidad y derivabilidad de la exponencial (esto será útil en aplicaciones).

Recuerdo: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ subconjunto no-vacío y $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t)$ función real. Decimos que f es <u>continua</u> en $t_0 \in \Omega$ si
"Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tq: si $t \in \Omega$ y $|t - t_0| < \delta$ entonces $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$."

Si consideramos $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ y $f: \Omega \to V$ función con valores en el espacio vectorial <u>normado</u> $(V, \|\cdot\|)$, entonces la definición anterior se adapta fácilmente:

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ subconj no-vacío y $(V, \|\cdot\|)$ e.v.n. Una función $f: \Omega \to V$ es <u>continua</u> en $t_0 \in \Omega$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq si $t \in \Omega$ y $|t - t_0| < \delta$ entonces $\|f(t) - f(t_0)\| < \varepsilon$.

Obs: Como siempre, si $\dim_k(V)$ es finita entonces <u>todas</u> las normas de V son equivalentes y luego la continuidad de $f: \Omega \to V$ es independiente de la norma de V que escojamos ($\boxed{\text{Ejercicio}}$).

⚠ Si $V = \mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$, entonces $f: \Omega \to k^n$ está determinada por sus n funciones componentes $f_1, \dots, f_n: \Omega \to k$ tales que

$$f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)), \quad t \in \Omega.$$

Si escogemos la norma $\|\cdot\|_\infty$ notamos que f es continua en $t_0 \in \Omega$ si y sólo si cada componente $f_1, \dots, f_n$ es continua en $t_0 \in \Omega$.

<u>Ejemplo</u>: ① $V = \mathbb{R}^3$: $f(t) = (t^2, t^3, \sin(t))$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

② $V = M_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$: $f(t) = \begin{pmatrix} t & t^2+1 \\ \sqrt{t} & e^t \end{pmatrix}$ es continua en $\Omega = [0, +\infty[$.

Obs: La noción de límite es completamente análoga: sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ no vacío, $f : \Omega \to V$ y $t_0 \in \Omega$. Decimos que $\lim_{t \to t_0} f(t) = l$, para cierto $l \in V$, si: "$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq si $t \in \Omega$ y $|t - t_0| < \delta$ entonces $\|f(t) - l\| < \varepsilon$".

Igual que antes, si $V = \mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ y escogemos la norma $\|\cdot\|_\infty$, entonces para $f : \Omega \to k^n$, $t \mapsto (f_1(t), \dots, f_n(t))$ y $l = (l_1, \dots, l_n) \in k^n$ se tiene:

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = l \iff \lim_{t \to t_0} f_1(t) = l_1, \dots, \lim_{t \to t_0} f_n(t) = l_n.$$

Esto último permite probar directamente, por ejemplo, que el límite de una suma es la suma de los límites.

Prop: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ no-vacío, y sean $F : \Omega \to M_{m \times n}(\mathbb{C})$ y $G : \Omega \to M_{n \times p}(\mathbb{C})$ funciones con valores matriciales tales que para $t_0 \in \Omega$ los límites $\lim_{t \to t_0} F(t)$ y $\lim_{t \to t_0} G(t)$ existen. Entonces, la función $FG : \Omega \to M_{m \times p}(\mathbb{C})$, $t \mapsto F(t)G(t)$ tiene un límite en $t_0 \in \Omega$ y además $\lim_{t \to t_0} (F(t)G(t)) = \left(\lim_{t \to t_0} F(t)\right) \cdot \left(\lim_{t \to t_0} G(t)\right)$.

Dem: Análoga a la demostración en el caso de funciones a valores reales (cf. pág 68). ■

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ no-vacío y $(V, \|\cdot\|)$ e.v.n. Decimos que f es <u>derivable</u> en $t_0 \in \Omega$ si $f : \Omega \to V$ es tal que el límite

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

existe. En tal caso, el valor del límite es denotado $f'(t_0) \in V$: la derivada de f en t_0.

⚠ Si $V = \mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ y escogemos la norma $\|\cdot\|_\infty$, entonces se prueba que para $f : \Omega \to k^n$, $t \mapsto (f_1(t), \dots, f_n(t))$ y $t_0 \in \Omega$ se tiene:

f derivable en $t_0 \in \Omega \iff f_1, \dots, f_n$ son derivables en t_0.

Más aún, en tal caso se tiene que $f'(t_0) = (f_1'(t_0), \dots, f_n'(t_0))$.

Ejemplo: ① $V = \mathbb{R}^3$: $f(t) = (t^2, t^3, \sin(t))$ es derivable en todo $\mathbb{R}$ y $f'(t_0) = (2t_0, 3t_0^2, \cos(t_0))$.

② $V = M_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$: $f(t) = \begin{pmatrix} t & t^2+1 \\ \sqrt{t} & e^t \end{pmatrix}$ es derivable en $]0, +\infty[$ y

$$f'(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 2t_0 \\ 1/(2\sqrt{t_0}) & e^{t_0} \end{pmatrix}.$$

Obs: Gracias a las propiedades de límites, se puede verificar directamente que la derivada de una suma es la suma de las derivadas.

Prop: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ no-vacío, y sean $F : \Omega \to M_{m\times n}(\mathbb{C})$ y $G : \Omega \to M_{n\times p}(\mathbb{C})$ funciones con valores matriciales, definidas en un intervalo abierto en torno a $t_0 \in \Omega$ y derivables en t_0. Entonces, FG es derivable en $t_0 \in \Omega$ y

$$(FG)'(t_0) = F'(t_0)G(t_0) + F(t_0)G'(t_0).$$

Dem: Sea $\delta(t) = \dfrac{F(t)G(t) - F(t_0)G(t_0)}{t-t_0}$. Basta calcular $\lim\limits_{t\to t_0} \delta(t)$:

Escribimos $\delta(t) = \dfrac{F(t)G(t) - F(t_0)G(t) + F(t_0)G(t) - F(t_0)G(t_0)}{t-t_0}$

$$= \left(\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0}\right)G(t) + F(t_0)\left(\frac{G(t)-G(t_0)}{t-t_0}\right),$$

de donde obtenemos $\lim\limits_{t\to t_0} \delta(t) = F'(t_0)G(t_0) + F(t_0)G'(t_0)$ pues es el límite de un producto de matrices (cf. pág 73). ■

⚠ Muy importante: Dado que el producto de matrices no es conmutativo, es importante prestar atención al orden de las matrices en la fórmula anterior!

Para estudiar la función exponencial usaremos la siguiente desigualdad:

Lema: Sea $A \in M_n(k)$, entonces $\|e^A - I_n - A\|_1 \leq \|A\|_1^2\, e^{\|A\|_1}$.

Dem: Tenemos que $e^A - I_n - A = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{A^k}{k!}$.

$$\Rightarrow \|e^A - I_n - A\|_1 \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\|A^k\|_1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A^{k+2}\|_1}{(k+2)!} \leq \|A\|_1^2 \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|A\|_1^k}{(k+2)!} \leq \|A\|_1^2 \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|A\|_1^k}{k!}}_{e^{\|A\|_1}}$$ ■

Teorema: Sea $A \in M_n(k)$. La función $f : \mathbb{R} \to M_n(k)$, $t \mapsto f(t) = e^{tA}$ es derivable en todo $\mathbb{R}$, y además $f'(t_0) = A e^{t_0 A} = e^{t_0 A} A$. En particular, $f(t) = e^{tA}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ y su derivada m-ésima es $f^{(m)}(t_0) = A^m e^{t_0 A} = e^{t_0 A} A^m$.

Dem: Queremos probar que $\dfrac{e^{tA} - e^{t_0 A}}{t-t_0} - A e^{t_0 A} = \dfrac{e^{tA} - e^{t_0 A} - (t-t_0)Ae^{t_0 A}}{t-t_0} =: \Delta(t)$

tiende a 0 cuando $t \to t_0$. Dado que $t_0 A$ y $(t-t_0)A$ conmutan, tenemos que $e^{tA} = e^{(t-t_0)A + t_0 A} = e^{(t-t_0)A}\cdot e^{t_0 A}$. Sea $h := t - t_0$, entonces:

$$e^{tA} - e^{t_0 A} - (t-t_0)Ae^{t_0 A} = e^{(t-t_0)A}e^{t_0 A} - e^{t_0 A} - (t-t_0)Ae^{t_0 A} = (e^{hA} - I_n - hA)e^{t_0 A}.$$

El lema anterior aplicado a hA implica que:

$$\|e^{tA} - e^{t_0 A} - (t-t_0)Ae^{t_0 A}\|_1 \leq \|e^{hA} - I_n - hA\|_1 \|e^{t_0 A}\|_1 \leq h^2 \|A\|_1^2 e^{|h|\|A\|_1} \|e^{t_0 A}\|_1$$

$\Rightarrow \|\Delta(t)\|_1 \leq h \|A\|_1^2 e^{|h|\|A\|_1} \|e^{t_0 A}\|_1 \longrightarrow 0$ cuando $h \to 0$, ie, $f'(t_0) = Ae^{t_0 A}$.

Por inducción, obtenemos $f^{(m)}(t_0) = A^m e^{t_0 A}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Finalmente, notamos que $A^m \left(\sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{(tA)^k}{k!}\right) = \left(\sum\limits_{k=0}^{N}\dfrac{(tA)^k}{k!}\right)A^m \xrightarrow[N\to\infty]{} A^m e^{tA} = e^{tA}A^m$ ✓ ■