$\boxed{\text{Ejercicio Importante}}$ Sea $u: V \to V$ endomorfismo tq P_u escinde sobre $\mathbb{k}$, y sea $u = u_s + u_n$ su descomposición de Dunford. Sea $\mathcal{B}$ una base de V tq

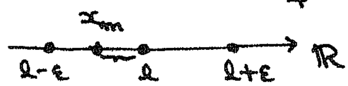
$$J = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c|c} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & J_{n_p}(\lambda_p) \end{array}\right)$$

forma canónica de Jordan de u. Probar que $S = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_s)$ y $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_n)$ están dadas por:

$$S = \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda_1 I_{n_1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_p I_{n_p} \end{array}\right) \quad \text{y} \quad N = \left(\begin{array}{c|c|c} J_{n_1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & J_{n_p} \end{array}\right).$$

§24. Espacios vectoriales normados

Motivación: Recordemos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales converge a un límite $l \in \mathbb{R}$ si: $\forall \varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq si $n \geq n_0$ entonces $|x_n - l| < \varepsilon$.



Esta última desigualdad dice que la "distancia" entre x_n y l es menor que ε. En esta sección extenderemos estas ideas a sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde $x_n \in V$ es un vector: necesitamos una noción de "distancia".

A modo de ejemplo consideremos $V = \mathbb{R}^2$: si $v_1 = (x_1, y_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2)$ definimos la distancia euclideana entre v_1 y v_2 por $\|v_1 - v_2\|_2$, donde

$$\|(x,y)\|_2 := \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Es natural entonces decir que una sucesión $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vectores en $\mathbb{R}^2$ converge a $l \in \mathbb{R}^2$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq si $n \geq n_0$ entonces $\|v_n - l\|_2 < \varepsilon$.

Por otro lado, si escribimos coordenadas: $v_n = (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ y $l = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, es natural también decir que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a l si (x_n) converge a $a \in \mathbb{R}$ y si (y_n) converge a $b \in \mathbb{R}$. No es difícil notar que esto último ocurre si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq si $n \geq n_0$ entonces $\|v_n - l\|_\infty < \varepsilon$, donde

$$\|(x,y)\|_\infty := \max(|x|, |y|) \quad \text{para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

¿Cómo comparar ambas nociones de convergencia?

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\|(x,y)\|_2 \leq \|(x,y)\|_\infty \leq \|(x,y)\|_2 \quad . (*)$$

Deducir que las nociones de convergencia anteriores coinciden, ie, si $l \in \mathbb{R}^2$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en $\mathbb{R}^2$ entonces: "$u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} l$" $\Leftrightarrow$ "$u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} l$".

Conclusión: Necesitamos una noción de "distancia". Aunque no hay una única forma de medir distancia, la noción de convergencia es la misma si podemos comparar las distancias como en $(*)$.

En esta sección $k = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y $|\cdot|$ denota el valor absoluto o módulo en k, i.e., $|x| = \max(x,-x)$ si $k=\mathbb{R}$ y $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$ si $z = a+ib \in \mathbb{C}$.

Def: Sea V un k-e.v. Una norma de V es una función $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ tq para todos $x, y \in V$ y $\lambda \in k$ se cumple:
① $\|x\| = 0 \iff x = 0$
② $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.
③ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ("desigualdad triangular").
En tal caso decimos que $(V, \|\cdot\|)$ (o que V) es un espacio vectorial normado.

Ejemplo: Sea $V = \mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$, definimos las normas:
$\|(x_1,\dots,x_n)\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$
$\|(x_1,\dots,x_n)\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$
$\|(x_1,\dots,x_n)\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$.
Las propiedades ①, ② y ③ no son difíciles de probar para $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$, pero la desigualdad triangular ③ para $\|\cdot\|_2$ es más sutil y la admitiremos por el momento (Más adelante: Es consecuencia de la "desigualdad de Cauchy-Schwarz").

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$ para todo $x \in V = \mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$.

Def: Sea V un k-e.v. y sean $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ dos normas en V. Decimos que las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ son equivalentes si existen constantes $a, b \in \mathbb{R}^{>0}$ tq
$$a\|x\| \leq \|x\|' \leq b\|x\|$$
para todo $x \in V$.

Hecho (sin prueba): Si $\dim_k(V)$ es finita, todas las normas de V son equivalentes ! (Análisis I).

En todo lo que sigue, supondremos que V es de dimensión finita. En particular, la definición siguiente no depende de la norma $\|\cdot\|$ escogida:

Def: Sea V un k-e.v. y sea $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de V. Decimos que $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge a un vector $l \in V$ si:
"Para todo $\varepsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}^*$ tq para todo $m \geq m_0$ se tiene $\|v_m - l\| < \varepsilon$."

Obs importante: Si $\mathcal{B}$ es una base de V, todo $v \in V$ se escribe de forma única $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$, donde $(x_1, \dots, x_n) \in k^n$ son las coordenadas de v respecto a $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$. En otras palabras:

$\varphi_{\mathcal{B}}: \mathbb{k}^n \to V$, $(x_1,\dots,x_n) \mapsto x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ es un isomorfismo. Luego, toda norma $\|\cdot\|$ en V define una norma en $\mathbb{k}^n$, y viceversa.

En part, si escogemos la norma $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{k}^n$ tenemos que una sucesión $(v_m)_{m\in\mathbb{N}} = ((x_{m,1},\dots,x_{m,n}))_{m\in\mathbb{N}}$ de vectores en $\mathbb{k}^n$ converge al vector $l = (l_1,\dots,l_n) \in \mathbb{k}^n$ si y sólo si para todo $j\in\{1,\dots,n\}$ la sucesión real o compleja $(x_{m,j})_{m\in\mathbb{N}}$ "j-ésima componente" converge a $l_j \in \mathbb{k}$.

⚠ La observación anterior implica que la mayoría de los resultados sobre sucesiones reales o complejas son verdad para sucesiones vectoriales. Por ejemplo: una sucesión convergente es acotada, el límite de la suma es la suma de los límites (pero no el producto, pues no hemos definido el producto de vectores), etc.

Es importante notar que la definición de convergencia tiene el inconveniente de requerir conocer a priori el valor del límite $l \in V$. Es útil tener un criterio de convergencia que pueda verificarse sólo a partir de $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$:

Def: Sea $(V, \|\cdot\|)$ un e.v. normado. Decimos que una sucesión $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de elementos de V es una sucesión de Cauchy si:
"Para todo $\varepsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tq para todos $p, q \geq m_0$ se tiene $\|v_p - v_q\| < \varepsilon$".

Ejemplo: Si $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge a $l \in V$, entonces $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.
En efecto, dado $\varepsilon > 0$ tenemos que $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ y luego, dado que $\lim_{m\to\infty} v_m = l$, $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ tq si $m \geq m_0$ entonces $\|v_m - l\| < \frac{\varepsilon}{2}$. En part, si $p, q \geq m_0$ entonces $\|v_p - v_q\| = \|(v_p - l) + (l - v_q)\| \underset{\text{desig. triangular}}{\leq} \|v_p - l\| + \|v_q - l\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ✓

Conclusión: Toda sucesión convergente es de Cauchy. Más aún (Análisis I):

Hecho (sin prueba): Si $\dim_{\mathbb{k}}(V)$ es finita, toda sucesión de Cauchy es convergente.

Caso particular importante: Sea $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sucesión en V. Definimos la sucesión $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de "sumas parciales" mediante:

$$S_m := \sum_{k=0}^{m} v_k = v_0 + \dots + v_m \in V.$$

Decimos que la serie vectorial $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ es convergente si $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge.
Gracias al criterio de Cauchy: La serie $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ converge si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tq para todos $p > q \geq m_0$ se tiene

$$\|S_p - S_q\| = \|v_{q+1} + v_{q+2} + \dots + v_p\| < \varepsilon.$$

Def: Sea V un k-e.v. (con $k=\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Decimos que una serie vectorial $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ de elementos de V <u>converge absolutamente</u> si la serie <u>real</u> $\sum_{k=0}^{\infty} \|v_k\|$ converge.

Prop: Toda serie absolutamente convergente es convergente.

Dem: Sea $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ absolutamente convergente y sea $\varepsilon>0$. Usaremos el criterio de Cauchy: Dado que $\sum_{k=0}^{\infty} \|v_k\|$ converge, es de Cauchy

$\Rightarrow \exists m_0 \in \mathbb{N}$ tq para todos $p>q\geq m_0$ se tiene $\sum_{k=q+1}^{p} \|v_k\| < \varepsilon$. Por otro lado:

$$\Big\|\sum_{k=q+1}^{p} v_k\Big\| \underbrace{\leq}_{\text{desig. triangular}} \sum_{k=q+1}^{p} \|v_k\| < \varepsilon \implies \Big(\sum_{k=0}^{m} v_k\Big)_{m\in\mathbb{N}} \text{ es de Cauchy} \Rightarrow \text{convergente} \quad \blacksquare$$

Obs: La desigualdad triangular implica que si $\sum v_k$ es absolutamente convergente:

$$\Big\|\sum_{k=0}^{m} v_k\Big\| \leq \sum_{k=0}^{m} \|v_k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|v_k\|$$

Tomando $m\to\infty$, obtenemos en este caso que $\Big\|\sum_{k=0}^{\infty} v_k\Big\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|v_k\|$.

<u>Caso particular importante</u>: $V = M_n(k)$ (con $k=\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).

Podemos considerar normas sobre $M_n(k) \cong k^{n^2}$, sucesiones de matrices $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$, series de matrices $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$, etc.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $(A_m)_{m\in\mathbb{N}_{\geq 1}}$ sucesión en $M_2(\mathbb{R})$ dada por $A_m = \begin{pmatrix} m\sin(1/m) & \frac{m}{m^2+1} \\ \frac{2m+3}{m} & 4 \end{pmatrix}$

Calcular (si existe) $\lim_{m\to\infty} A_m$.

⚠ Notar que el producto en $M_n(k)$ <u>no</u> es conmutativo. Luego, vale la pena redemostrar propiedades del límite del producto en este contexto:

Lema: Para todas $A, B \in M_n(k)$ se tiene $\|AB\|_1 \leq \|A\|_1 \|B\|_1$.

Dem: Si $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ entonces

$$\|AB\|_1 = \sum_{i,j}\Big|\sum_k a_{ik}b_{kj}\Big| \underbrace{\leq}_{\text{des. triang.}} \sum_{i,j,k} |a_{ik}|\,|b_{kj}| \leq \Big(\sum_{i,k}|a_{ik}|\Big)\Big(\sum_{\ell,j}|b_{\ell j}|\Big) = \|A\|_1\|B\|_1 \quad \blacksquare$$

<u>Importante</u>: Dado que $M_n(k)$ es de dimensión finita, <u>todas</u> las normas son equivalentes. Luego, en todos los resultados sobre convergencia podemos considerar (sin pérdida de generalidad) la norma $\|\cdot\|_1$ (útil gracias al Lema anterior).

Prop: Sea $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de matrices que converge a $A\in M_n(k)$ y sea $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de matrices que converge a $B\in M_n(k)$. Entonces, la sucesión $(A_mB_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge a la matriz AB.

Dem: Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos $\varepsilon_1 := \dfrac{\varepsilon}{2(\varepsilon + \|B\|_1)} > 0$ y $\varepsilon_2 := \dfrac{\varepsilon}{2(\|A\|_1 + 1)} > 0$.

Sea $m_0 \in \mathbb{N}$ tq para todo $m \geq m_0$ se tiene que

$$\|A_m - A\|_1 < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2(\varepsilon + \|B\|_1)} \quad \text{y} \quad \|B_m - B\|_1 < \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2(\|A\|_1 + 1)} < \varepsilon .$$

En part, $\|B_m\|_1 = \|(B_m - B) + B\|_1 \leq \|B_m - B\|_1 + \|B\|_1 < \varepsilon + \|B\|_1$. Luego, si $m \geq m_0$:

$$\begin{aligned}
\|A_m B_m - AB\|_1 &= \|(A_m B_m - AB_m) + (AB_m - AB)\|_1 \\
&\underset{\text{des. triang.}}{\leq} \|(A_m - A)B_m\|_1 + \|A(B_m - B)\|_1 \underset{\text{Lema}}{\leq} \|A_m - A\|_1 \|B_m\|_1 + \|A\|_1 \|B_m - B\|_1 \\
&< \|A_m - A\|_1 (\varepsilon + \|B\|_1) + \|A\|_1 \|B_m - B\|_1 \\
&< \frac{\varepsilon}{2(\varepsilon + \|B\|_1)} \cdot (\varepsilon + \|B\|_1) + \|A\|_1 \cdot \frac{\varepsilon}{2(\|A\|_1 + 1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

∎

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ sucesión de matrices tal que $A_m \in GL_n(k)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Sup. que $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge a $A \in M_n(k)$ y $(A_m^{-1})_{m \in \mathbb{N}}$ converge a $B \in M_n(k)$. Probar que $A \in GL_n(k)$ y $A^{-1} = B$.

El producto de series convergentes de matrices es más delicado:

Prop: Sean $\sum A_K$ y $\sum B_K$ series de matrices absolutamente convergentes con límites respectivos A y B. La serie $\sum C_K$ de término general

$$C_K := A_0 B_K + A_1 B_{K-1} + \ldots + A_K B_0$$

es absolutamente convergente con límite AB.

Dem: Notar que ~~para~~ para $m \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$\sum_{K=0}^{m} \|C_K\|_1 \leq \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j \leq m}} \|A_i B_j\|_1 \leq \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j \leq m}} \|A_i\|_1 \|V_j\|_1 \leq \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{m} \|A_i\|_1\right)}_{\leq \sum_{i=0}^{\infty} \|A_i\|_1} \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{m} \|B_j\|_1\right)}_{\leq \sum_{j=0}^{\infty} \|B_j\|_1}$$

$\Rightarrow$ Las sumas parciales de la serie real $\sum_{K=0}^{\infty} \|C_K\|_1$ de términos positivos son acotadas $\Rightarrow \sum_{K=0}^{\infty} \|C_K\|_1$ converge $\Rightarrow \sum_{K=0}^{\infty} C_K$ absolutamente convergente ✓

Finalmente, observamos que

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{K=0}^{2m} C_K - \left(\sum_{i=0}^{m} A_i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} B_j\right) \right\|_1 &= \left\| \sum_{\substack{i > m \text{ ó } j > m \\ i+j \leq 2m}} A_i B_j \right\|_1 \leq \sum_{\substack{i > m \text{ ó } j > m \\ i+j \leq 2m}} \|A_i\|_1 \|B_j\|_1 \\
&\leq \left(\sum_{i=0}^{2m} \|A_i\|_1\right)\left(\sum_{j=0}^{2m} \|B_j\|_1\right) - \left(\sum_{i=0}^{m} \|A_i\|_1\right)\left(\sum_{j=0}^{m} \|B_j\|_1\right)
\end{aligned}$$

Como el último término tiende a 0 cuando $m \to \infty$, y como el límite de la sucesión $\left(\left(\sum_{i=0}^{m} A_i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} B_j\right)\right)_{m \in \mathbb{N}}$ es AB, deducimos que $\sum_{K=0}^{\infty} C_K = AB$. ∎