§23. Forma canónica de Jordan

Motivación: Incluso sobre $\mathbb{C}$, no toda matriz es diagonalizable (eg. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$) sin embargo, vimos (cf. Observación en pág. 47) que al considerar bases de los espacios característicos $V(\lambda)$ podemos probar que toda matriz en $M_n(k)$ cuyo polinomio característico escinde sobre k (eg. $k=\mathbb{C}$) es semejante a una matriz diagonal por bloques

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

donde A_j posee sólo $\lambda_j \in k$ como valor propio y $A_j - \lambda_j I_{n_j}$ nilpotente.
Una consecuencia importante de lo anterior es que todo endomorfismo $u: V \to V$ tq P_u escinde sobre k se descompone como

$$u = u_s + u_n \quad \text{(descomposición de Dunford)}$$

donde u_s es diagonalizable y u_n es nilpotente.
En esta sección, veremos un resultado importante de Camille Jordan (1838-1922) que permite describir de manera más precisa las matrices A_j antes mencionadas.

Def: Sea $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y $\lambda \in k$. Un bloque de Jordan de tamaño m ~~asociado~~ a λ es una matriz en $M_m(k)$ dada por:

$$J_m(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Un bloque de Jordan nilpotente de tamaño m es $J_m := J_m(0)$, ie,

$$J_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Notar que el índice de nilpotencia de J_m es m (ie, $J_m^{m-1} \neq 0$ y $J_m^m = 0$) y que $J_m(\lambda) = \lambda I_m + J_m$ es la descomposición de Dunford de $J_m(\lambda)$.

Ejemplo: $J_1(\lambda) = (\lambda)$, $J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, etc.

Def: Sea $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ un entero. Una partición de n es una sucesión finita y decreciente de naturales $\underline{n} = (n_1, \dots, n_s) \in (\mathbb{N}^{\geq 1})^s$ para cierto $s \geq 1$ tal que

$$|\underline{n}| := n_1 + \dots + n_s = n.$$

Es decir, es una escritura de n como suma de enteros positivos.

Ejemplo: Las posibles particiones de $n=4$ son: (4), $(3,1)$, $(2,2)$, $(2,1,1)$ y $(1,1,1,1)$.

Obs: Las particiones son muy importantes en matemáticas y en física (eg. Bohr y Kalckar, 1937), y tienen muchas propiedades interesantes (eg. Ramanujan: "Si el último dígito de n es 4 o 9, el nº de particiones de n es múltiplo de 5").

Def: Sea $\lambda \in k$, $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y $\underline{m} = (m_1, \dots, m_s) \in (\mathbb{N}^{\geq 1})^s$ una partición de m. La matriz de Jordan de tamaño m asociada a $\lambda \in k$ y a $\underline{m} = (m_1, \dots, m_s)$ es la matriz por bloques dada por:

$$J_{\underline{m}}(\lambda) = J_{(m_1,\dots,m_s)}(\lambda) = \left(\begin{array}{c|c|c} J_{m_1}(\lambda) & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & J_{m_s}(\lambda) \end{array}\right) \in M_m(k)$$

Ejemplo: Para $m = 4$ y $\lambda \in k$ tenemos:

$$J_{(4)}(\lambda) = J_4(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_{(3,1)}(\lambda) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right), \quad J_{(2,2)}(\lambda) = \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right)$$

$$J_{(2,1,1)}(\lambda) = \left(\begin{array}{cc|c|c} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right), \quad J_{(1,1,1,1)}(\lambda) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right)$$

Teorema: Sea V un k-e.v. de $\dim_k(V) = n$ y sea $u: V \to V$ nilpotente. Entonces, $\exists\, \mathcal{B}$ base de V tal que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = J_{\underline{n}} := J_{\underline{n}}(0)$ para cierta partición $\underline{n}$ de n.

Más aún, la partición $\underline{n}$ está completamente determinada por u. En part, toda matriz nilpotente $A \in M_n(k)$ es semejante a una única matriz $J_{\underline{n}}$, y luego hay una biyección entre clases de semejanza de matrices nilpotentes de $M_n(k)$ y el conjunto $\mathcal{P}(n)$ de particiones de n.

Dem: Sea $e_0 \in V \setminus \{0\}$ vector no-nulo y sea $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ el menor entero positivo tq $u^r(e_0) = 0$. En part, $r \leq n$.

$\boxed{\text{Paso 1}}$ Sea $e_i := u^i(e_0)$ para $i \in \{0, \dots, r-1\}$. Entonces, $\mathcal{F} = (e_0, \dots, e_{r-1})$ es l.i.

En efecto, por inducción en r tenemos que: OK si $r = 1$: $\mathcal{F} = (e_0)$ ✓

Si $r \geq 2$ y $\exists\, a_0, \dots, a_{r-1} \in k$ tq $a_0 e_0 + \dots + a_{r-1} e_{r-1} = 0$ $(\star)$, entonces u aplicado a $(\star)$ nos da: $a_0 e_1 + \dots + a_{r-2} e_{r-1} = 0$.

Dado que el menor entero positivo $r' \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tq $u^{r'}(u(e_0)) = u^{r'}(e_1) = 0$ es $r' = r-1$, la hipótesis de inducción implica que $(e_1, \dots, e_{r-1})$ es l.i.

$\Rightarrow a_0 = \dots = a_{r-2} = 0$ y $(\star)$ se reduce a $a_{r-1} e_{r-1} = 0 \underset{e_{r-1} \neq 0}{\Longrightarrow} a_{r-1} = 0$ ✓

Caso particular: Si $r = n$ entonces $\mathcal{B}' = (e_0, \dots, e_{n-1})$ es una base de V.

En part, la relación $u(e_0) = e_1, \dots, u(e_{n-2}) = e_{n-1}$ y $u(e_{n-1}) = 0$ implica

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$ Luego, si $\mathcal{B} = (e_{n-1}, \dots, e_1, e_0)$ entonces

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = J_n \quad \text{matriz de Jordan.}$$

Caso general: sea $p \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ el índice de nilpotencia de u (ie, $u^{p-1} \neq 0$ y $u^p = 0 \iff m_u(X) = X^p$). Definamos $N_i := \ker(u^i)$ para $i \in \{0, \dots, p\}$.
Notar que $u^i(x) = 0 \Rightarrow u^{i+1}(x) = u(u^i(x)) = 0$. Luego, tenemos inclusiones:

$$\{0\} = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \dots \subseteq N_p = V = V_{(0)}$$

$\boxed{\text{Paso 2}}$ La inclusión $N_{i-1} \subseteq N_i$ es estricta, ie, $N_{i-1} \neq N_i$

En efecto, si $N_{i-1} = N_i$ para cierto $i \in \{1, \dots, p\}$ entonces para todo $x \in V$ se tiene que: $u^p(x) = 0 = u^i(u^{p-i}(x)) \Rightarrow u^{p-i}(x) \in N_i = N_{i-1}$
$\Rightarrow u^{i-1}(u^{p-i}(x)) = u^{p-1}(x) = 0$ ↯ (p es minimal !). ✓

Luego, $\{0\} = N_0 \subsetneq N_1 = \ker(u) \subsetneq N_2 = \ker(u^2) \subsetneq \dots \subsetneq N_p = V$.
En part, $\dim_k(N_i) \geq i$ para todo $i \in \{1, \dots, p\}$ y $p \leq \dim_k(N_p) = n$.

$\boxed{\text{Paso 3}}$ $u(N_{i+1}) \subseteq N_i$ para todo $i \in \{0, \dots, p-1\}$:

Si $x \in N_{i+1}$ entonces $u^{i+1}(x) = 0 = u^i(u(x))$. En part, $u(x) \in N_i$ ✓

$\boxed{\text{Paso 4}}$ Usando inducción descendente sobre $i \in \{0, \dots, p\}$, construiremos un sub-e.v. $M_i \subseteq V$ tq $N_i = N_{i-1} \oplus M_i$ y $u(M_i) \subseteq M_{i-1}$.

[Recuerdo (inducción descendente): sea $n_0 \in \mathbb{N}$ y $P(n)$ proposición lógica.
Si ① $P(n_0)$ es verdad; ② $\forall n \in \{0, \dots, n_0\}$, $P(n)$ verdad $\Rightarrow P(n-1)$ verdad.
$\Rightarrow P(n)$ es verdad $\forall n \in \{0, \dots, n_0\}$.]

$n_0 = p$: Sea M_p cualquier espacio complementario de N_{p-1} en V.
$\Rightarrow V = N_p = N_{p-1} \oplus M_p$.

Sup que M_i ($i \geq 2$) está construido, y notar que:
i) $u(M_i) \subseteq N_{i-1}$: pues $M_i \subseteq N_i \Rightarrow u(M_i) \subseteq u(N_i) \subseteq N_{i-1}$ ✓
ii) $u(M_i) \cap N_{i-2} = \{0\}$: pues $M_i \cap N_{i-1} = \{0\}$. En efecto, si existiese $x \in (u(M_i) \cap N_{i-2}) \setminus \{0\}$ no-nulo, entonces $x = u(m)$ con $m \in M_i \subseteq N_i \setminus N_{i-1}$ (ie, $u^{i-1}(m) \neq 0$ y $u^i(m) = 0$). Luego, $u^{i-2}(x) \neq 0$ y $u^{i-1}(x) = 0$, es decir, $x \in N_{i-1} \setminus N_{i-2}$ ↯

Así, basta tomar un sub-e.v. M_{i-1} en N_{i-1} complementario de N_{i-2} y que contenga $u(M_i)$
$\Rightarrow N_{i-1} = N_{i-2} \oplus M_{i-1}$ y $u(M_i) \subseteq M_{i-1}$ ✓

Obs: Notar que

$$\begin{array}{ccccc} N_i & = & N_{i-1} & \oplus & M_i \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & {\scriptstyle u}\downarrow & & {\scriptstyle u}\downarrow \\ N_{i-1} & = & N_{i-2} & \oplus & M_{i-1} \end{array}$$

pues $u(N_i) \subseteq N_{i-1}$ y $u(M_i) \subseteq M_{i-1}$
"u respeta la descomposición"

$$\Rightarrow V = N_p = N_{p-1} \oplus M_p = N_{p-2} \oplus M_{p-1} \oplus M_p = \dots = \underbrace{M_1 \oplus \dots \oplus M_i}_{= N_i} \oplus M_{i+1} \oplus \dots \oplus M_p$$

Más aún, dado que $M_1 = N_1 = \ker(u)$ y $M_i \cap M_1 = \{0\}$ para $i \geq 2$, se tiene que $u|_{M_i} : M_i \hookrightarrow M_{i-1}$ es inyectiva para $i \geq 2$. En part, $\dim_k(M_i) \leq \dim_k(M_{i-1})$.

<u>Importante</u>: Gracias a la discusión anterior, tenemos que

$$\underline{m} = (m_1, \dots, m_p) \in (\mathbb{N}^{\geq 1})^p$$

con $m_j = \dim_k(M_j)$, es una partición de $n = \dim_k(V)$ completamente determinada por u. En efecto, $V = \bigoplus_{j=1}^{p} M_j$ implica $m_1 + \dots + m_p = n$ y además tenemos que $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_p$. Finalmente, dado que $N_i = \bigoplus_{j=1}^{i} M_j$ se tiene que $m_i = \dim_k(N_i) - \dim_k(N_{i-1})$ está determinado por u, pues $N_i = \ker(u^i)$ ✓

$\boxed{\text{Paso 5}}$ Construcción de una base $\mathcal{B}$ tq $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = J_{\underline{m}}$ para cierta partición $\underline{m}$:

Consideremos las inclusiones:

$$(\dim_k M_p = m_p) \leq (\dim_k M_{p-1} = m_{p-1}) \leq \dots \leq (\dim_k M_1 = m_1)$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
M_p & \xhookrightarrow{u} & M_{p-1} & \xhookrightarrow{u} & M_{p-2} & \xhookrightarrow{u} & \dots & \xhookrightarrow{u} & M_1 = N_1 = \ker(u) \\
e_{p,1} & & u(e_{p,1}) & & u^2(e_{p,1}) & & & & u^{p-1}(e_{p,1}) \\
\vdots & \longmapsto & \vdots & \longmapsto & \vdots & & & & \vdots \\
e_{p,m_p} & & u(e_{p,m_p}) & & u^2(e_{p,m_p}) & & & & u^{p-1}(e_{p,m_p}) \\
(\text{base}) & & e_{p-1,m_p+1} & & u(e_{p-1,m_p+1}) & & & & u^{p-2}(e_{p-1,m_p+1}) \\
 & & \vdots & \longmapsto & \vdots & & & & \vdots \\
 & & e_{p-1,m_{p-1}} & & u(e_{p-1,m_{p-1}}) & & & & u^{p-2}(e_{p-1,m_{p-1}}) \\
 & & (\text{base}) & & e_{p-2,m_{p-1}+1} & & & & u^{p-3}(e_{p-2,m_{p-1}+1}) \\
 & & & & \vdots & & & & \vdots \\
 & & & & e_{p-2,m_{p-2}} & & & & u^{p-3}(e_{p-2,m_{p-2}}) \\
 & & & & (\text{base}) & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & u(e_{2,m_2}) \\
 & & & & & & & & e_{1,m_2+1} \\
 & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & e_{1,m_1} \\
 & & & & & & & & (\text{base})
\end{array}$$

Los vectores que aparecen en este diagrama forman una base de V, que ordenamos de la manera siguiente:

Comenzamos en la esquina superior derecha con $u^{p-1}(e_{p,1})$ y leemos la primera fila de derecha a izquierda: $\mathcal{B}_1 := (u^{p-1}(e_{p,1}), \dots, u(e_{p,1}), e_{p,1})$

Notar que $u(\mathcal{B}_1) \subseteq \mathcal{B}_1$ y, gracias al Paso 1 (<u>Caso Particular</u>), obtenemos un bloque de Jordan nilpotente J_p.

La segunda línea de derecha a izquierda: $\mathcal{B}_2 := (u^{p-1}(e_{p,2}), \dots, u(e_{p,2}), e_{p,2}) \rightsquigarrow J_p$

Continuamos así hasta la última línea: $\mathcal{B}_{m_1} = (e_{1,m_1})$ con $u(e_{1,m_1}) = 0$ y luego obtenemos el bloque $J_1 = (0)$.

Así, si consideramos $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_{m_1})$ base de V, obtenemos:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} J_p & & \\ & \ddots & \\ & & J_p \end{matrix} & & & \\ & \begin{matrix} J_{p-1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{p-1} \end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{matrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

En otras palabras, la matriz de u en la base $\mathcal{B}$ es diagonal por bloques de tipo J_m, con m_p bloques de tipo J_p, $m_{p-1} - m_p$ bloques de tipo J_{p-1}, y así sucesivamente hasta tener $m_1 = \dim_k(\ker(u))$ bloques de tipo $J_1 = (0)$.
Luego, si $\underline{n} = (\underbrace{p, \dots, p}_{m_p \text{ veces}}, \underbrace{p-1, \dots, p-1}_{m_{p-1}-m_p \text{ veces}}, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{m_1 \text{ veces}}) \Rightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = J_{\underline{n}}$ matriz de Jordan.

$\boxed{\text{Paso 6}}$ Unicidad de $\underline{n}$ (partición) tq $\exists\, \mathcal{B}$ base con $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = J_{\underline{n}}$:
Si existe otra base $\mathcal{C}$ de V tq $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = J_{\underline{n}'}$, entonces reagrupando bloques de Jordan del mismo tamaño podemos construir M_j' tq $N_i = \bigoplus_{j=1}^{i} M_j'$. En part, tendríamos como antes que $m_j' = \dim_k(M_j')$ están determinados por $u \Rightarrow m_j = m_j'$ para todo $j \Rightarrow \underline{n}' = \underline{n}$. ✓ ■

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Calcular el número de clases de semejanza de matrices nilpotentes en $M_6(k)$. Dar un representante de cada clase.

<u>Teorema</u> (Jordan, 1870): Sea V un k-e.v. de $\dim_k(V) = n$ y sea $u: V \to V$ un endomorfismo tal que su polinomio característico escinde sobre k, ie,
$$P_u(X) = \prod_{j=1}^{p} (X - \lambda_j)^{n_j} \qquad (n_j \geq 1 \ \text{ y } \lambda_i \neq \lambda_j \ \text{ si } i \neq j).$$
Entonces, $\exists\, \mathcal{B}$ base de V tal que $J := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ es una matriz diagonal por bloques de Jordan:
$$J = \left(\begin{array}{c|c|c} J_{\underline{n_1}}(\lambda_1) & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & J_{\underline{n_p}}(\lambda_p) \end{array}\right)$$
"forma canónica de Jordan de u"

donde $J_{\underline{n_j}}(\lambda_j) \in M_{n_j}(k)$ es la matriz de Jordan de tamaño n_j asociada a $\lambda_j \in k$ y a la partición $\underline{n_j}$ del entero n_j. Más aún, J está determinada de manera única por u "módulo permutación", ie, si $\exists\, \mathcal{B}'$ base de V tal que $J' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ es una matriz diagonal por bloques de Jordan $J_{\underline{n_1'}}(\mu_1), \dots, J_{\underline{n_s'}}(\mu_s)$ con $\mu_i \neq \mu_j$ si $i \neq j$, entonces $s = p$ y $\exists\, \sigma \in S_p$ permutación tal que $\mu_i = \lambda_{\sigma(i)}$ y $\underline{n_i'} = \underline{n_{\sigma(i)}}$.

Dem: Para cada $j \in \{1,\dots,p\}$ denotamos $u_j := u|_{V_{(\lambda_j)}} : V_{(\lambda_j)} \to V_{(\lambda_j)}$. Así, dado que $V_{(\lambda_j)} = \ker\left((u-\lambda_j \mathrm{Id}_V)^{m_j}\right)$, tenemos que $u_j - \lambda_j \mathrm{Id}_{V_{(\lambda_j)}}$ es un endomorfismo nilpotente de $V_{(\lambda_j)} \Rightarrow \exists \mathcal{B}_j$ base de $V_{(\lambda_j)}$ tq $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_j}(u_j - \lambda_j \mathrm{Id}_{V_{(\lambda_j)}}) = J_{\underline{n_j}}$ para una única partición $\underline{n_j}$ de $m_j = \dim_k V_{(\lambda_j)} = \mathrm{mult}_{alg}(\lambda_j)$.

$\Rightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_j}(u_j) = J_{\underline{n_j}} + \lambda_j I_{m_j} = J_{\underline{n_j}}(\lambda_j)$.

Dado que $V = \bigoplus_{j=1}^{p} V_{(\lambda_j)}$, si consideramos la base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_p)$ tenemos

$$J := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c|c} J_{\underline{n_1}}(\lambda_1) & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & J_{\underline{n_p}}(\lambda_p) \end{array}\right)$$

matriz diagonal por bloques de Jordan ✓ ("forma canónica de Jordan").

Veamos la unicidad módulo permutación: Sup que $\exists \mathcal{B}'$ base de V tq

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \left(\begin{array}{c|c|c} J_{\underline{n_1'}}(\mu_1) & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & J_{\underline{n_s'}}(\mu_s) \end{array}\right) \quad \text{con } \mu_i \neq \mu_j \text{ si } i \neq j$$

Dado que esta matriz es triangular superior, obtenemos $P_u(X) = \prod_{j=1}^{s} (X-\mu_j)^{n_j'}$

$\Rightarrow p = s$ y $\exists \sigma \in S_p$ permutación tq $\mu_j = \lambda_{\sigma(j)}$ y $n_j' = n_{\sigma(j)}$ para todo $j \in \{1,\dots,p\}$.

Resta probar que las particiones $\underline{n_j'}$ y $\underline{n_{\sigma(j)}}$ son iguales: reordenando los μ_j, podemos suponer que $\mu_j = \lambda_j$ (ie, $\sigma = \mathrm{Id}$ en S_p) y probar que las particiones $\underline{n_j}$ y $\underline{n_j'}$ de $m_j \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ son iguales:

Sea $\mathcal{B}_j'$ el conjunto de vectores de $\mathcal{B}'$ que corresponden al bloque de Jordan $J_{\underline{n_j'}}(\lambda_j) \in M_{m_j}(k) \Rightarrow W_j := \mathrm{Vect}_k(\mathcal{B}_j')$ verifica $u(W_j) \subseteq W_j$ y $\dim_k(W_j) = m_j$. Además, si $u_{W_j} := u|_{W_j} : W_j \to W_j$ entonces tenemos que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_j'}(u_{W_j}) = J_{\underline{n_j'}}(\lambda_j)$ por construcción.

Como $J_{\underline{n_j'}}$ es triangular superior estricta de tamaño $m_j \times m_j$, tenemos

$J_{\underline{n_j'}}^{m_j} = (J_{\underline{n_j'}}(\lambda_j) - \lambda_j I_{m_j})^{m_j} = 0 \Rightarrow (u_{W_j} - \lambda_j \mathrm{Id}_{W_j})^{m_j} = 0$.

$\Rightarrow W_j \subseteq V_{(\lambda_j)} \underset{\dim_k W_j = \dim V_{(\lambda_j)}}{\Longrightarrow} W_j = V_{(\lambda_j)}$

Luego, $\mathcal{B}_j$ y $\mathcal{B}_j'$ son bases del <u>mismo</u> sub-e.v. $V_{(\lambda_j)}$ y verifican $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_j}(u_j - \lambda_j \mathrm{Id}_{V_{(\lambda_j)}}) = J_{\underline{n_j}}$ y $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_j'}(u_j - \lambda_j \mathrm{Id}_{V_{(\lambda_j)}}) = J_{\underline{n_j'}}$.

La unicidad de la partición en el caso nilpotente implica que $\underline{n_j} = \underline{n_j'}$. ■

Obs: En términos matriciales: Sea $A \in M_n(k)$ tq $P_A \in k[X]$ escinde sobre k.
$\Rightarrow \exists P \in GL_n(k)$ tq

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c|c} J_{\underline{n_1}}(\lambda_1) & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & J_{\underline{n_p}}(\lambda_p) \end{array}\right) =: J \quad \text{"forma canónica de Jordan"}$$

Más aún, J es única módulo permutación de los bloques de Jordan $J_{\underline{n_j}}(\lambda_j)$.

Del Teorema anterior y de la demostración de unicidad en el caso nilpotente, obtenemos:

Corolario: Sean $A, B \in M_n(k)$ tq P_A y P_B escinden sobre k. Son equivalentes:

① A y B son semejantes (ie, $\exists P \in GL_n(k)$ tq $P^{-1}AP = B$).

② A y B tienen el mismo polinomio característico $P_A(X) = P_B(X) = \prod_{j=1}^{p} (X-\lambda_j)^{n_j}$ (con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$) y $\dim_k \ker[(A-\lambda I_n)^m] = \dim_k \ker[(B-\lambda I_n)^m]$ para todo valor propio $\lambda \in k$ y todo $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

③ A y B tienen la misma forma canónica de Jordan (módulo permutación).

Ejercicio Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{C}$ complejos tq $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Sea $P(X) = \prod_{j=1}^{p} (X-\lambda_j)^{n_j}$ con $n_j \geq 1$ y $n_1 + \ldots + n_p = n$. El Corolario anterior implica que el número de clases de semejanza de matrices $A \in M_n(\mathbb{C})$ tq $P_A = P$ es igual a $p(n_1)\ldots p(n_p)$, donde $p(n_j)$ es el número de particiones de $n_j \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

① Sea $P(X) = X^7 - 3X^6 + 3X^5 - X^4$. ¿Cuál es el número de clases de semejanza de matrices en $M_7(\mathbb{C})$ con polinomio característico P?

② Sea $P(X) = \prod_{j=1}^{p} (X-\lambda_j)^{n_j}$ y $\mathcal{C}(A) := \{A \in M_n(\mathbb{C}) \text{ tq } P_A(X) = P(X)\}$. ¿Bajo qué condición sobre P el conjunto $\mathcal{C}(A)$ está formado por una sola clase de semejanza?

⚠ **Importante**: A partir de las demostraciones anteriores se deduce el siguiente **cálculo algorítmico** de la forma canónica de Jordan:

Sea $A \in M_n(k)$ tal que $P_A(X) = \prod_{j=1}^{p} (X-\lambda_j)^{n_j}$ escinde sobre k. Para cada λ_j:

1º Calculamos $d_m := \dim_k \ker[(A-\lambda_j I_n)^m]$ para $m = 1, 2, \ldots$ hasta obtener $d_{r_j} = \dim_k \ker[(A-\lambda_j I_n)^{r_j}] = n_j = \dim_k V_{(\lambda_j)}$ para cierto r_j.

(**Obs** ① Si conocemos $m_A(X) = \prod_{j=1}^{p} (X-\lambda_j)^{m_j}$ entonces $r_j = m_j$
② Teorema del rango: $d_m = n - rg[(A-\lambda_j I_n)^m]$)

Output: Obtenemos una secuencia $0 := d_0 < d_1 < \ldots < d_{r_j} = n_j$

2º La secuencia $d_0, d_1, \ldots, d_{r_j}$ determina cuantos bloques de Jordan $J_m(\lambda_j)$ hay en la matriz de Jordan $J_{\underline{n_j}}(\lambda_j)$: $d_1 = d_1 - d_0 = \dim_k \ker(A-\lambda_j I_n)$ es el número de bloques de Jordan (de tamaño ≥ 1) que aparecen en $J_{\underline{n_j}}(\lambda_j)$.

(**Obs**: Si $d_1 = 1 \Rightarrow J_{\underline{n_j}}(\lambda_j) = J_{n_j}(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \in M_{n_j}(k)$).

$d_2 - d_1$ es el número de bloques de Jordan de tamaño ≥ 2 que aparecen en $J_{\underline{n_j}}(\lambda_j)$.
$d_3 - d_2$ es el número de bloques de Jordan de tamaño ≥ 3 que aparecen en $J_{\underline{n_j}}(\lambda_j)$, etc.

Output: Matriz de Jordan $J_{\underline{n_j}}(\lambda_j) \in M_{n_j}(k)$ asociada a λ_j.

Finalmente, $J = \left(\begin{array}{c|c|c} J_{\underline{n_1}}(\lambda_1) & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & J_{\underline{n_p}}(\lambda_p) \end{array}\right) \in M_n(k)$.

(**Obs**: Veremos en ejemplos, cómo obtener $P \in GL_n(k)$ a partir de A y J.)

Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$. Calculemos $P_A(X)$:

$$\begin{vmatrix} X & -1 & 1 & 0 \\ 3 & X+1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & X-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)\begin{vmatrix} X & -1 & 1 \\ 3 & X+1 & -3 \\ 2 & -1 & X-1 \end{vmatrix} \underset{C_3 \mapsto C_3+C_2}{=} (X-2)\begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 3 & X+1 & X-2 \\ 2 & -1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)^2\begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 3 & X+1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{F_2 \mapsto F_2-F_3}{=} (X-2)^2\begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 1 & X+2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (X-2)^2\begin{vmatrix} X & -1 \\ 1 & X+2 \end{vmatrix} = (X-2)^2(X^2+2X+1) = (X-2)^2(X+1)^2.$$

Sea $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$, y sea $n_1 = \mathrm{mult}_{alg}(-1) = 2$, $n_2 = \mathrm{mult}_{alg}(2) = 2$.

Queremos determinar las matrices de Jordan $J_{\underline{n_1}}(-1)$, $J_{\underline{n_2}}(2) \in M_2(\mathbb{R})$.

$\underline{\lambda_1 = -1}|$: Sea $B = A - \lambda_1 I_4 = A + I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ¿$\ker(B)$, $\ker(B^2)$?

Para calcular una base de $\ker(B) = V_{\lambda_1}$ podemos hacer operaciones columna o bien:

$$B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2-x_3 \\ -3x_1+3x_3+x_4 \\ -2x_1+x_2+2x_3+x_4 \\ 3x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{F_4}{\Rightarrow} x_4 = 0 \overset{F_2}{\Rightarrow} x_1 = x_3 \overset{F_1 \circ F_3}{\Rightarrow} x_2 = 0$$

$\Rightarrow \ker(B) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(v_1)$ con $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. (En part, $\mathrm{mult}_{geom}(-1) = 1$ y A <u>no</u> es diagonalizable)

⚠ Dado que $\dim_{\mathbb{R}} \ker(B) = 1$, $J_{\underline{n_1}}(-1)$ posee 1 bloque de Jordan

$\Rightarrow J_{\underline{n_1}}(-1) = J_2(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. <u>Más aún</u>, $J_{\underline{n_1}}(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ nos dice <u>cómo</u> escoger una "buena" base de $V_{(-1)}$: $\mathcal{B}_1 = (v_1, v_2)$ con $Av_1 = (-1)v_1$, ie,

$(A+I_4)v_1 = 0$ y $Av_2 = v_1 + (-1)v_2 \Leftrightarrow (A+I_4)v_2 = v_1$.

$\Rightarrow$ Tomamos $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y v_2 tq $Bv_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. eg; (resolviendo el sistema): $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(Otra forma: Calcular B^2 y una base de $\ker(B^2)$ dada por $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2\}$ con $\ker(B) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(v_1)$ ~~tq~~ $\ker(B^2) = \ker(B) \oplus \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(v_2)$) $\boxed{\text{Ejercicio}}$

$\underline{\lambda_2 = 2}|$: Sea $C = A - \cancel{\lambda_2} I_4 = A - 2I_4 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ¿$\ker(C)$, $\ker(C^2)$?

Verificamos mediante operaciones columna que $\ker(C) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(v_3)$ con $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dado que $\dim_{\mathbb{R}} \ker(C) = 1$, $J_{\underline{n_2}}(2) = J_2(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y luego, al calcular una solución de $(A-2I_4)v_4 = v_3 \Leftrightarrow Cv_4 = v_3$ (eg. $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$), obtenemos una base $\mathcal{B}_2 = (v_3, v_4)$ de $V_{(2)}$.

Sea $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = J = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & & \\ 0 & -1 & & 0 \\ \hline & & 2 & 1 \\ 0 & & 0 & 2 \end{array}\right)$

forma canónica de Jordan de A.

$\boxed{\text{Ejercicio Importante}}$ Sea $u : V \to V$ endomorfismo tq P_u escinde sobre $\mathbb{K}$, y sea $u = u_s + u_n$ su descomposición de Dunford. Sea $\mathcal{B}$ una base de V tq

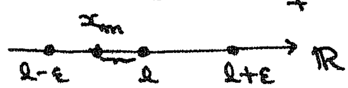
$$J = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_{n_p}(\lambda_p) \end{pmatrix}$$

forma canónica de Jordan de u. Probar que $S = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_s)$ y $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_n)$ están dadas por:

$$S = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_p I_{n_p} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad N = \begin{pmatrix} J_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_{n_p} \end{pmatrix}.$$

§24. Espacios vectoriales normados

Motivación: Recordemos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales converge a un límite $l \in \mathbb{R}$ si: $\forall \varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq si $n \geq n_0$ entonces $|x_n - l| < \varepsilon$.



Esta última desigualdad dice que la "distancia" entre x_n y l es menor que ε. En esta sección extenderemos estas ideas a sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde $x_n \in V$ es un vector: necesitamos una noción de "distancia".

A modo de ejemplo consideremos $V = \mathbb{R}^2$: si $v_1 = (x_1, y_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2)$ definimos la distancia euclideana entre v_1 y v_2 por $\|v_1 - v_2\|_2$, donde

$$\|(x,y)\|_2 := \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Es natural entonces decir que una sucesión $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vectores en $\mathbb{R}^2$ converge a $l \in \mathbb{R}^2$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq si $n \geq n_0$ entonces $\|v_n - l\|_2 < \varepsilon$.

Por otro lado, si escribimos coordenadas: $v_n = (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ y $l = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, es natural también decir que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a l si (x_n) converge a $a \in \mathbb{R}$ y si (y_n) converge a $b \in \mathbb{R}$. No es difícil notar que esto último ocurre si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq si $n \geq n_0$ entonces $\|v_n - l\|_\infty < \varepsilon$, donde

$$\|(x,y)\|_\infty := \max(|x|, |y|) \quad \text{para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

¿Cómo comparar ambas nociones de convergencia?

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \|(x,y)\|_2 \leq \|(x,y)\|_\infty \leq \|(x,y)\|_2 \quad . (*)$$

Deducir que las nociones de convergencia anteriores coinciden, i.e., si $l \in \mathbb{R}^2$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en $\mathbb{R}^2$ entonces: "$u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} l$" $\Leftrightarrow$ "$u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} l$".

Conclusión: Necesitamos una noción de "distancia". Aunque no hay una única forma de medir distancia, la noción de convergencia es la misma si podemos comparar las distancias como en $(*)$.