§22. Cálculos de Descomposiciones de Dunford

Caso particular importante: $k = \mathbb{R}$.

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ matriz real, y $P_A \in \mathbb{R}[X]$ su polinomio característico. Las raíces complejas de P_A pueden separarse en raíces reales (valores propios reales) y en pares de raíces complejas no reales conjugadas: $\mu_1, \overline{\mu}_1, \ldots, \mu_s, \overline{\mu}_s$. La multiplicidad de μ_j y $\overline{\mu}_j$ es la misma, y los espacios propios V_{μ_j} y $V_{\overline{\mu}_j}$, así como los espacios característicos $V_{(\mu_j)}$ y $V_{(\overline{\mu}_j)}$, son conjugados, ie, $\overline{V_{\mu_j}} = V_{\overline{\mu}_j}$ y $\overline{V_{(\mu_j)}} = V_{(\overline{\mu}_j)}$. (esto permite reducir cálculos).

Consideremos los polinomios:

i) minimal real $m_A \in \mathbb{R}[X]$, ie, el polinomio real unitario de grado más pequeño tal que $m_A(A) = 0$ en $M_n(\mathbb{R})$.

ii) minimal complejo $M_A \in \mathbb{C}[X]$, ie, el polinomio complejo unitario de grado más pequeño tq $M_A(A) = 0$ en $M_n(\mathbb{C})$.

[Prop: $m_A = M_A \in \mathbb{R}[X]$. (no necesariamente escinde sobre $\mathbb{R}$).

Dem: Sabemos que M_A divide a m_A. Sea $M_A(X) = X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \ldots + a_1 X + a_0$ con $a_i \in \mathbb{C}$. Dado que $M_A(A) = 0$, tenemos que $\mathrm{Re}(M_A)(A) = 0$, ie,

$\mathrm{Re}(M_A)(A) = A^m + \mathrm{Re}(a_{m-1})A^{m-1} + \ldots + \mathrm{Re}(a_1)A + \mathrm{Re}(a_0)I_n = 0$

$\Rightarrow m_A$ divide $\mathrm{Re}(M_A)$, y luego:

$$\left.\begin{array}{l} m = gr(M_A) \underset{M_A \text{ divide } m_A}{\leq} gr(m_A) \underset{m_A \text{ divide } \mathrm{Re}(M_A)}{\leq} gr(\mathrm{Re}(M_A)) = m \end{array}\right\} \Rightarrow m_A = M_A \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ matriz real. Sup. que $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ matriz invertible compleja tq $P^{-1}AP$ es diagonal con coeficientes reales. Probar que $\exists Q \in GL_n(\mathbb{R})$ matriz invertible real tq $Q^{-1}AQ$ es diagonal.

Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$ (matriz de permutación).

$$\Rightarrow P_A(X) = \det\begin{pmatrix} X & -1 & 0 & 0 \\ 0 & X & -1 & 0 \\ 0 & 0 & X & -1 \\ -1 & 0 & 0 & X \end{pmatrix} = X \cdot \det\begin{pmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & X \end{pmatrix} - (-1)\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \end{pmatrix} = X^4 - 1.$$

Luego, los valores propios de A son $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = i, \lambda_4 = -i$. Dado que los 4 valores propios son distintos, A es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$ y $P_A(X) = m_A(X)$. (cf. Proposición anterior).

Para calcular los espacios propios:

$\underline{\lambda_1 = 1}$: $A - \lambda_1 I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ⇝ Para encontrar una base de $V_1 = \ker[A - I_4]$ usamos operaciones columna (cf. §6, pág 12):

$$\left(\begin{array}{cccc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_2 \mapsto C_2 + C_1} \left(\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3 \mapsto C_3 + C_2} \left(\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_4 \mapsto C_4 + C_3} \left(\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow V_1 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Otra forma: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-x \\ z-y \\ t-z \\ x-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y = z = t \Rightarrow V_1 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Similar: $V_{-1} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$; $V_i = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} \right\rangle$; $V_{-i} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle$

Importante: Gracias a la discusión anterior, <u>basta</u> calcular V_i para obtener $\overline{V_i} = V_{-i}$ (conjugado)! (Pues $A \in M_4(\mathbb{C})$ tiene coeficientes <u>reales</u>).

Finalmente, dado que A es diagonalizable, su descomposición de Dunford es $A = S + N$, con $S = A$ (diagonalizable) y $N = 0$ (nilpotente).

<u>Ejemplo</u>: Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

$$\Rightarrow P_A(X) = \det \begin{pmatrix} X-2 & 1 & -2 \\ -10 & X+5 & -7 \\ -4 & 2 & X-2 \end{pmatrix} \underset{C_1 \mapsto C_1 + 2C_2}{=} \det \begin{pmatrix} X & 1 & -2 \\ 2X & X+5 & -7 \\ 0 & 2 & X-2 \end{pmatrix} = X \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & X+5 & -7 \\ 0 & 2 & X-2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_2 \mapsto F_2 - 2F_1}{=} X \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & X+3 & -3 \\ 0 & 2 & X-2 \end{pmatrix} \underset{C_2 \mapsto C_2 + C_3}{=} X \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & X & -3 \\ 0 & X & X-2 \end{pmatrix} = X\,(X^2 - 2X + 3X)$$

$\Rightarrow P_A(X) = X^2(X+1)$. Luego, los valores propios de A son $\lambda_1 = -1$ (raíz simple) y $\lambda_2 = 0$ (raíz doble): $\mathrm{mult}_{alg}(\lambda_1) = 1$, $\mathrm{mult}_{alg}(\lambda_2) = 2$.

<u>Obs</u>: Dado que $\underbrace{\mathrm{mult}_{geom}(\lambda)}_{\overset{\text{def}}{=} \dim_{\mathbb{R}}(V_\lambda) \geq 1} \leq \mathrm{mult}_{alg}(\lambda) \Rightarrow$ $\dim(V_{-1}) = 1$, $\dim(V_0) = 1$ ó 2.

$\underline{\lambda_1 = -1}$: Dado que λ_1 es raíz simple, $V_{-1} = V_{(-1)} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(v_1)$ para cierto $v_1 \in \mathbb{R}^3$ en $\ker[A - (-1)I_3] = \ker[A + I_3]$. Basta resolver:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ 10x - 4y + 7z = 0 \\ 4x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

Si $x = 1$: $\begin{cases} -y + 2z = -3 \quad /\cdot(-4) \\ -4y + 7z = -10 \end{cases} \Rightarrow -z = 2 \Rightarrow z = -2;\ y = +3 + 2z = -1$.

$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ genera la recta $V_{\lambda_1} = V_{-1}$.

$\underline{\lambda_2 = 0}$: $V_{\lambda_2} = V_0 = \ker[A - 0\cdot I_3] = \ker[A]$. Operaciones columna:

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_1 \leftrightarrow C_2]{C_2 \mapsto -C_2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 10 & 7 \\ 2 & 4 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3 \mapsto C_3 - 2C_1]{C_2 \mapsto C_2 - 2C_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(v_2) \text{ con } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$\underline{\text{Obs}}$: En part, $\underbrace{\mathrm{mult}_{geom}(\lambda_2)}_{= \dim_{\mathbb{R}}(V_{\lambda_2})} = 1 < \underbrace{\mathrm{mult}_{alg}(\lambda_2)}_{= \dim_{\mathbb{R}}(V_{(\lambda_2)})} = 2$ y A $\underline{\text{no}}$ es diagonalizable.

Más aún, $m_A(X) = X^2(X+1)$.

Espacio característico: $V_{(\lambda_2)} = V_{(0)} = \ker(A^2)$. Calculamos $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3 \mapsto C_3 + C_2]{C_1 \mapsto C_1 + 2C_2} \left(\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \ker(A^2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(v_2, v_3)$$

con $\underbrace{v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{vector propio}}$ y $\underbrace{v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{vector propio generalizado}}$.

Sea $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vimos (pág. 47): $P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$ donde
- $A_1 \in M_1(\mathbb{R})$ posee sólo $\lambda_1 = -1$ como valor propio
- $A_2 \in M_2(\mathbb{R})$ posee sólo $\lambda_2 = 0$ como valor propio

Notar que $\begin{cases} A(v_1) = (-1)v_1 \Rightarrow A_1 = (-1) \in M_1(\mathbb{R}) \\ A(v_2) = 0 \cdot v_2 \text{ y } A(v_3) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = v_2 \Rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \end{cases}$

$\Rightarrow P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Más aún, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ (Ejercicio)

$$\Rightarrow A = P \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Finalmente, para encontrar la descomposición de Dunford $A = S + N$ procedemos como en la demostración del Teorema (ver pág. 51):

A la matriz por bloques $\left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) =: A'$ la descomponemos

$$\text{en } A' = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 I_1 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2 I_2 \end{array}\right)}_{S'} + \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} A_1 - \lambda_1 I_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 - \lambda_2 I_2 \end{array}\right)}_{N'} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{S'} + \underbrace{\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{N'}$$

Luego, $S = PS'P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ (diagonalizable)

y $N = PN'P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 8 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (nilpotente)

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Verificar que $A = S + N$, $SN = NS$, S diagonalizable y N nilpotente.

Ejemplo importante: Una Ecuación Diferencial lineal homogénea de orden n con coeficientes constantes es una ecuación de la forma

$$(E) \quad x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0,$$

donde los $a_j \in \mathbb{C}$ son constantes y $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto x(t)$ es una función a valores complejos n veces derivable.

Si definimos $x_0(t) := x(t)$, $x_1(t) := x'(t)$, $\dots$, $x_{n-1}(t) := x^{(n-1)}(t)$ y consideramos los vectores $X(t) = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \end{pmatrix}$ y $X'(t) = \begin{pmatrix} x_0'(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x^{(n)}(t) \end{pmatrix}$

Entonces, $(E) \iff X'(t) = AX(t)$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Veremos más adelante que para resolver (E) hay que analizar $P_A \in \mathbb{C}[X]$:

[**Obs**: Sea $A \in M_n(k)$ y $(XI_n - A) \in M_n(k(X))$. Entonces, ${}^t(XI_n - A) = XI_n - {}^tA$ en $M_n(k(X)) \Rightarrow P_A = P_{{}^tA}$ para toda matriz $A \in M_n(k)$! Similar: $m_A = m_{{}^tA}$]

Luego, basta calcular $P_B \in \mathbb{C}[X]$, donde $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots 1 & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$

Contrariamente a lo hecho hasta ahora, calcularemos m_B para deducir P_B: Sea $u = u_B : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $v \mapsto Bv$ el endomorfismo asociado y $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canónica de $\mathbb{C}^n$. Entonces:

$u(e_1) = e_2$, $u(e_2) = e_3$, $\dots$, $u(e_{n-1}) = e_n$, $u(e_n) = -a_0 e_1 - \dots - a_{n-1}e_n$.

Sea $m_B(X) = b_0 + b_1 X + \dots + b_{m-1}X^{m-1} + X^m$ polinomio minimal. Si $m < n$:

$(m_B(u))(e_1) = b_0 e_1 + b_1 e_2 + \dots + b_{m-1}e_m + e_{m+1} \neq 0$ ↯ (pues $m_B(u) = 0$)

Luego, $m = n$ y en particular $P_B = m_B$. Más aún:

$$(m_B(u))(e_1) = b_0 e_1 + b_1 e_2 + \dots + b_{n-1}e_n - a_0 e_1 - \dots - a_{n-1}e_n$$
$$= (b_0 - a_0)e_1 + \dots + (b_{n-1} - a_{n-1})e_n = 0$$

$\Rightarrow a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $\dots$, $a_{n-1} = b_{n-1}$, i.e.,

$$P_B(X) = m_B(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

En conclusión: $P_A(X) = m_A(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$. En part,

A diagonalizable $\iff$ Todas las raíces de $P_A = m_A$ son simples

$\underset{P_A = m_A}{\iff}$ A posee n valores propios distintos.