Dado que m_u divide P_u, y las raíces de P_u son los valores propios de u, tenemos que toda raíz de m_u es un valor propio de u. El recíproco es cierto:

Teorema: Sea $u: V \to V$ un endomorfismo. Entonces, todo valor propio de u es raíz del polinomio minimal $m_u \in k[X]$.

Dem: Sea $\lambda \in k$ un valor propio de u y sea $v \neq 0$ un vector propio asociado, ie, $u(v) = \lambda v$. La división euclideana de m_u por $(X-\lambda)$ nos da:

$$m_u(X) = Q(X)(X-\lambda) + c \text{ , donde } c \text{ polinomio de grado} < 1 \text{, ie, } c \in k$$

$\Rightarrow 0 = m_u(u) = Q(u)(u - \lambda Id_V) + c\, Id_V$ en $End_k(V)$. Aplicándolo a v:

$$0 = Q(u)(\underbrace{(u-\lambda Id_V)(v)}_{=0}) + c\underbrace{Id_V(v)}_{=v} = \underbrace{Q(u)(0)}_{=0} + cv = cv \underset{v\neq 0}{\Longrightarrow} c = 0$$

Luego, $m_u(X) = Q(X)(X-\lambda)$, ie, $\lambda \in k$ es una raíz de m_u. ∎

Ejemplo: Sup. que $\dim_k(V) = n$, entonces para todo endomorfismo $u: V \to V$ se tiene $gr(P_u) = n$. Cayley-Hamilton: m_u divide $P_u \Rightarrow gr(m_u) \leq n$. En part, si $u: V \to V$ tiene n valores propios distintos entonces el Teorema anterior implica que todos ellos son raíces de $m_u \Rightarrow gr(m_u) \geq n$. Luego, en ese caso tenemos que $m_u = P_u$.

Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \in M_3(k)$ y $B = A^2 = \begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \in M_3(k)$.

$\Rightarrow P_A(X) = P_B(X) = X^3$. Como A y B no son homotecias, $gr(m_A) \geq 2$ y $gr(m_B) \geq 2$. Como $B^2 = A^3 = 0$ tenemos que $m_A(X) = P_A(X) = X^3$ y $m_B(X) = X^2$ $(\neq P_B(X))$.

§21. Reducción de endomorfismos y Descomposición de Dunford:

Comencemos por probar el siguiente resultado útil:

Lema de los kernel: Sea $u: V \to V$ un endomorfismo y $P \in k[X]$ un polinomio. Entonces:

① El sub-e.v. $\ker(P(u))$ es estable por u, ie,
$$u(\ker P(u)) \subseteq \ker P(u).$$

② Si $P = AB$ con A y B primos entre sí (ie, $mcd(A,B) = 1$) entonces
$$\ker P(u) = \ker A(u) \oplus \ker B(u).$$

Dem: ① Notar que u y $P(u)$ conmutan: $u \circ P(u) = P(u) \circ u$.
Si $v \in \ker(P(u))$, ie, $P(u)(v) = 0$, entonces $P(u)(u(v)) = u(P(u))(v)$
$\Rightarrow u(v) \in \ker P(u)$ ✓ $\qquad = u(\underbrace{P(u)(v)}_{=0}) = 0$

② Teorema de Bézout $\Rightarrow \exists\, \mathcal{U}, \mathcal{V} \in k[X]$ tq $A\mathcal{U} + B\mathcal{V} = 1$.

$\Rightarrow A(u)\mathcal{U}(u) + B(u)\mathcal{V}(u) = id_V$. Si $v \in \ker A(u)$ y $v \in \ker B(u)$

$$\Rightarrow v = id_V(v) = (A(u)\mathcal{U}(u))(v) + (B(u)\mathcal{V}(u))(v) = \mathcal{U}(u)(\underbrace{A(u)(v)}_{=0}) + \mathcal{V}(u)(\underbrace{B(u)(v)}_{=0}) = 0$$

Luego, $\ker A(u)$ y $\ker B(u)$ están en suma directa. Veamos que generan $\ker P(u)$:
Primero que todo, si $v \in \ker A(u)$, ie, $A(u)(v) = 0$, entonces:
$$P(u)(v) = (A(u)B(u))(v) = B(u)(\underbrace{A(u)(v)}_{=0}) = 0 \Rightarrow v \in \ker P(u).$$
De manera similar $\ker B(u) \subseteq \ker P(u)$ y luego $\ker P(u) \supseteq \ker A(u) \oplus \ker B(u)$.
Sea $v \in \ker P(u)$, ie, $P(u)(v) = 0$. Si escribimos
$$v = id_V(v) = A(u)\mathcal{U}(u)(v) + B(u)V(u)(v),$$
basta probar que $A(u)\mathcal{U}(u)(v) \in \ker B(u)$ y $B(u)V(u)(v) \in \ker A(u)$ para concluir que $\ker P(u) = \ker A(u) \oplus \ker B(u)$. Para esto, notar que:
$$\underbrace{B(u)(A(u)}_{P(u)}\mathcal{U}(u)(v)) = P(u)\mathcal{U}(u)(v) = \mathcal{U}(u)(\underbrace{P(u)(v)}_{=0}) = 0 \checkmark$$
De manera similar, calculamos que $A(u)(B(u)V(u)(v)) = 0$ ✓ ■

<u>Corolario</u>: Sea $u: V \to V$ un endomorfismo y sean $P_1, \ldots, P_m \in k[X]$ polinomios tq $\text{mcd}(P_i, P_j) = 1$ si $i \neq j$. Si denotamos $P = P_1 \cdots P_m$, entonces:
$$\ker P(u) = \ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u) \oplus \ldots \oplus \ker P_m(u).$$

<u>Dem</u>: Inducción en m: Si $m = 2$ OK ✓ (Lema de los kernel).
Si $P_1, \ldots, P_m$ son dos a dos primos entre sí (ie, $\text{mcd}(P_i, P_j) = 1$ si $i \neq j$), entonces el (corolario de) Lema de Gauss implica que P_1 y $P_2 \cdots P_m$ son primos entre sí. Luego, el Lema de los kernel implica:
$$\ker P(u) = \ker P_1(u) \oplus \ker (P_2 \cdots P_m)(u).$$
Por hipótesis de inducción tenemos $\ker (P_2 \cdots P_m)(u) = \ker P_2(u) \oplus \ldots \oplus \ker P_m(u)$. ■

<u>Obs</u>: El Teorema de Cayley-Hamilton afirma que $m_u \mid P_u$ para todo $u: V \to V$ endomorfismo. En part, si P_u escinde sobre $k \Rightarrow m_u$ escinde sobre k.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Construir $A \in M_2(\mathbb{R})$ tq $m_A(X) = P_A(X) = X^2 + 1$.

<u>Recuerdo</u> ① Las raíces del polinomio minimal m_u del endomorfismo $u: V \to V$ son los valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in k$ (distintos) de u. Luego, <u>si suponemos</u> que m_u escinde sobre k entonces:
$$m_u(X) = \prod_{j=1}^{p} (X - \lambda_j)^{m_j}$$
donde $m_j \geq 1$ para todo $j \in \{1, \ldots, p\}$.

② Si $\lambda \in k$ es un valor propio de $u: V \to V$, el sub-e.v.
$$V_\lambda = \ker(u - \lambda Id_V) \subseteq V$$
es llamado el (sub) <u>espacio propio</u> asociado a λ.

<u>Terminología</u>: Sea $u: V \to V$ endomorfismo tq P_u escinde sobre k, ie,
$$P_u(X) = \prod_{j=1}^{p} (X - \lambda_j)^{n_j}.$$
i) El entero $\text{mult}_{alg}(\lambda_j) := n_j \geq 1$ es la <u>multiplicidad algebraica</u> de λ_j.
ii) El entero $\text{mult}_{geom}(\lambda_j) := \dim_k(V_\lambda)$ es la <u>multiplicidad geométrica</u> de λ_j.

<u>Obs</u>: Cayley-Hamilton $\Rightarrow m_j \leq n_j = \text{mult}_{alg}(\lambda_j)$.

El siguiente resultado permite comparar las multiplicidades:

Prop: Sea $u : V \to V$ un endomorfismo de un espacio vectorial de $\dim_k(V) = n$ y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in k$ (distintos) sus valores propios. Sup. que P_u escinde sobre k. Entonces:

① $\text{mult}_{\text{geom}}(\lambda_i) \leq \text{mult}_{\text{alg}}(\lambda_i)$ para todo $i \in \{1, \dots, p\}$.

② u es diagonalizable $\iff$ $\text{mult}_{\text{geom}}(\lambda_i) = \text{mult}_{\text{alg}}(\lambda_i)$ para todo $i \in \{1, \dots, p\}$.

Dem: ① Escribamos $P_u(X) = \prod_{j=1}^{p} (X - \lambda_j)^{n_j}$ y sea $d_j = \dim_k(V_{\lambda_j})$ para $j \in \{1, \dots, p\}$.

Queremos probar que $d_j \leq n_j$: Sea $\mathcal{C}_j$ una base de V_{λ_j}. Dado que los V_{λ_j} están en suma directa (ver §14), tenemos que $\mathcal{C} := (\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_p)$ es una familia l.i. y luego se puede completar en una base $\mathcal{B}$ de V. Luego,

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \lambda_1 I_{d_1} & 0 & 0 & * \\ \hline 0 & \ddots & 0 & * \\ \hline 0 & 0 & \lambda_p I_{d_p} & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & B \end{array}\right]$$

donde $B \in M_l(k)$ con $l = n - (d_1 + \dots + d_p)$. En part, A es triangular superior por bloques y por ende tenemos: $P_u(X) = \det(X I_n - A) = P_B(X) \prod_{j=1}^{p} (X - \lambda_j)^{d_j}$
$\Rightarrow d_j \leq n_j$ para todo $j \in \{1, \dots, p\}$ ✓

② u diagonalizable $\iff l = 0$ ($\iff P_B(X) = 1$) $\iff d_j = n_j$ para todo $j \in \{1, \dots, p\}$ ∎

Para completar el círculo de ideas, falta ver cómo interviene m_j (ie, la multiplicidad de λ_j en el polinomio minimal) en la discusión:

Def: Sea $u : V \to V$ endomorfismo y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in k$ sus valores propios (distintos). Si suponemos que $m_u \in k[X]$ escinde sobre k, ie,

$$m_u(X) = \prod_{j=1}^{p} (X - \lambda_j)^{m_j} \qquad (m_j \geq 1)$$

entonces el sub-ev.

$$V_{(\lambda_j)} := \ker\left[(u - \lambda_j \text{Id}_V)^{m_j}\right] \subseteq V$$

es llamado el (sub-) <u>espacio característico</u> (o <u>espacio propio generalizado</u>) asociado al valor propio $\lambda_j \in k$.

Obs: ① Si $P_j \in k[X]$ es $P_j(X) := (X - \lambda_j)^{m_j}$ $\Rightarrow V_{(\lambda_j)} = \ker P_j(u)$.

② El Lema de los kernels $\Rightarrow u(V_{(\lambda)}) \subseteq V_{(\lambda)}$ es <u>estable</u> por u.

③ $V_\lambda \subseteq V_{(\lambda)}$ para todo valor propio λ.

④ Un vector no-nulo $v \in V \setminus \{0\}$ pertenece a $V_{(\lambda)} \iff \exists\, k \in \{1, \dots, m_\lambda\}$ tq $(u - \lambda \text{Id}_V)^k(v) = 0$, donde m_λ es la multiplicidad de λ como raíz del polinomio minimal. En este caso, diremos que v es un <u>vector propio generalizado</u> asociado al valor propio $\lambda \in k$.

Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ triangular superior $\Rightarrow P_A(X) = (X-2)^2(X-3)$.

Cayley-Hamilton $\Rightarrow m_A(X) = (X-2)^m (X-3)$ con $m = 1$ o 2.

Si $m = 1$, entonces $(A-2I_3)(A-3I_3) = 0$, pero:

$$(A-2I_3)(A-3I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ no es nula } \Rightarrow \boxed{m=2} \checkmark$$

Espacios propios:

(i) $\lambda = 2$: $V_2 = \ker(A - 2I_3) = ?$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = z = 0$

Luego, $V_2 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\langle e_1 \rangle$ "eje x"

(ii) $\lambda = 3$: $V_3 = \ker(A - 3I_3) = ?$ $\quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y \\ -y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y = 0$

Luego, $V_3 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\langle e_3 \rangle$ "eje z"

Notar que $V_2 \oplus V_3$ no genera $\mathbb{R}^3$, i.e., A no es diagonalizable.

Espacios característicos:

(i) $\lambda = 2$: $V_{(2)} = \ker\left[(A - 2I_3)^2\right] = ?$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow V_{(2)} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\langle e_1, e_2 \rangle$ "plano xy" (Notar que $m = 2 = \dim_{\mathbb{R}} V_{(2)}$).

(ii) $\lambda = 3$: $V_{(3)} = V_3$ pues $\lambda = 3$ es raíz simple de m_A.

Notar que en este ejemplo $V_{(2)}$ y $V_{(3)}$ están en suma directa y además $\mathbb{R}^3 = V_{(2)} \oplus V_{(3)}$. !

Teorema: Sea $u: V \to V$ un endomorfismo y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in k$ sus valores propios (distintos). Si el polinomio característico $P_u \in k[X]$ escinde sobre k, i.e.,

$$P_u(X) = \prod_{j=1}^{p} (X - \lambda_j)^{n_j} \qquad (n_j \geq 1)$$

(y en particular $m_u(X) = \prod_{j=1}^{p} (X - \lambda_j)^{m_j}$ escinde también). Entonces:

(1) V es suma directa de los espacios característicos de u, i.e.,

$$V = \bigoplus_{j=1}^{p} V_{(\lambda_j)} = V_{(\lambda_1)} \oplus \dots \oplus V_{(\lambda_p)}, \text{ donde } V_{(\lambda_j)} = \ker\left[(u - \lambda_j \mathrm{Id}_V)^{m_j}\right].$$

(2) $\dim_k(V_{(\lambda_j)}) = \mathrm{mult}_{alg}(\lambda_j)$ es la multiplicidad algebraica n_j del valor propio λ_j para todo $j \in \{1, \dots, p\}$. En part, dado que $V_\lambda \subseteq V_{(\lambda)}$ se tiene que $\mathrm{mult}_{geom}(\lambda) = \dim_k(V_\lambda) \leq \dim_k(V_{(\lambda)}) = \mathrm{mult}_{alg}(\lambda)$.

Dem: (1) Sea $P_j(X) := (X - \lambda_j)^{m_j}$ para $j \in \{1, \dots, p\}$. Entonces $\mathrm{mcd}(P_i, P_j) = 1$ si $i \neq j$ y $m_u = P_1 \cdots P_p$. Luego, el (corolario del) Lema de los kernels implica que

$$\underbrace{\ker(\underbrace{m_u(u)}_{=0})}_{\ker(0) = V} = \underbrace{\ker P_1(u)}_{V_{(\lambda_1)}} \oplus \dots \oplus \underbrace{\ker P_p(u)}_{V_{(\lambda_p)}} \quad \checkmark$$

② Los espacios característicos son estables por u, ie, $u(V_{(\lambda)}) \subseteq V_{(\lambda)}$ para todo valor propio $\lambda \in k$. Dado que $V = V_{(\lambda_1)} \oplus \dots \oplus V_{(\lambda_p)}$, escogiendo una base $\mathcal{B}_j$ de cada $V_{(\lambda_j)}$ formamos una base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ de V tq $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ es una matriz diagonal por bloques (cf. Ejercicio importante en §14):

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

donde $A_j \in M_{s_j}(k)$, con $s_j = \dim_k(V_{(\lambda_j)})$. Queremos probar que $s_j = m_j$:
$P_u(X) = \det(X I_m - A) = P_{A_1}(X) \cdots P_{A_p}(X)$. En part, cada P_{A_j} escinde sobre k.
Finalmente, por definición de $V_{(\lambda_j)}$ se tiene que $(A_j - \lambda_j I_{s_j})^{m_j} = 0$
$\Rightarrow \det(A_j - \lambda_j I_{s_j})^{m_j} = 0 \Rightarrow \lambda_j$ es valor propio de A_j.
Más aún, como $V_\lambda \subseteq V_{(\lambda)}$ para todo valor propio λ, y los $V_{(\lambda_1)}, \dots, V_{(\lambda_p)}$ están en suma directa, λ_j es el <u>único</u> valor propio de A_j.
Como P_{A_j} escinde sobre k y $\mathrm{gr}(P_{A_j}) = s_j \Rightarrow P_{A_j}(X) = (X - \lambda_j)^{s_j}$.
Así, $P_u(X) = P_{A_1}(X) \cdots P_{A_p}(X) = \prod_{j=1}^{p} (X - \lambda_j)^{s_j} \Rightarrow s_j = m_j$ para todo j. ■

<u>Obs</u>: La demostración anterior prueba que <u>toda</u> matriz cuyo polinomio característico escinde sobre k es semejante a una matriz diagonal por bloques

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

donde cada bloque A_j posee sólo a $\lambda_j \in k$ como valor propio y verifica $(A_j - \lambda_j I_{m_j})^{m_j} = 0$.

<u>Corolario</u>: Sea $u: V \to V$ un endomorfismo tq P_u escinde sobre k, entonces:
u diagonalizable $\Leftrightarrow \mathrm{mult}_{geom}(\lambda) = \mathrm{mult}_{alg}(\lambda)$ para todo valor propio λ.
$\Leftrightarrow V_\lambda = V_{(\lambda)}$ para todo valor propio λ.

<u>Dem</u>: La primera equivalencia ya fue probada, y la segunda equivalencia se obtiene de $\mathrm{mult}_{geom}(\lambda) = \dim_k(V_\lambda)$ y $\mathrm{mult}_{alg}(\lambda) = \dim_k(V_{(\lambda)})$. ■

El resultado siguiente generaliza el Corolario anterior:

<u>Teorema</u>: Sea $u: V \to V$ un endomorfismo. Son equivalentes:
① u es diagonalizable.
② El polinomio característico P_u escinde sobre k y $\dim_k(V_\lambda) = \mathrm{mult}_{alg}(\lambda)$ para todo valor propio λ.
③ El polinomio minimal m_u escinde sobre k y sólo tiene raíces simples.

Dem: Sup. ①, ie, u diagonalizable. Sea $\mathcal{B}$ base de V tq $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$ es diagonal: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \lambda_p & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \lambda_p \end{pmatrix}$ donde $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in k$ son los valores propios (distintos) de A. Luego, $P_u(X) = \prod_{j=1}^{n} (X - \lambda_j)^{n_j}$ donde $n_j = \dim_k(V_{\lambda_j})$, ie, ② ✓

Más aún, si $P(X) := \prod_{j=1}^{n} (X - \lambda_j) \Rightarrow P(A) = 0$ y luego m_u divide P.

Dado que las raíces de m_u son $\lambda_1, \dots, \lambda_p \Rightarrow m_u(X) = P(X) = \prod_{j=1}^{n} (X - \lambda_j)$, ie, ① ⇒ ③ ✓

Sup ②, ie, $P_u(X) = \prod_{j=1}^{n} (X - \lambda_j)^{n_j}$ con $n_j \overset{def}{=} mult_{alg}(\lambda_j) \overset{②}{=} \underline{\dim_k(V_{\lambda_j})} \underset{def}{=} mult_{geom}(\lambda_j)$

$\Rightarrow u$ es diagonalizable, ie, ② ⇒ ① ✓

Sup ③, ie, $m_u(X) = \prod_{j=1}^{n} (X - \lambda_j)$. Luego $V_{(\lambda_j)} = \ker((u - \lambda \mathrm{Id}_V)^1) = V_{(\lambda_j)}$ para todo $j \in \{1, \dots, p\} \Rightarrow u$ diagonalizable, ie, ③ ⇒ ① ✓ ∎

Finalizamos esta sección con una consecuencia importante de los resultados previos: la "<u>descomposición de Dunford</u>" expresa un endomorfismo u como la suma $u = u_s + u_n$, donde u_s es diagonalizable y u_n "nilpotente". Además, u_s y u_n conmutan: $u_s u_n = u_n u_s$. Debido a lo anterior, comenzamos por presentar las siguientes nociones y resultados previos:

<u>Def</u>: Sea $u: V \to V$ endomorfismo. Decimos que u es <u>nilpotente</u> si $\exists r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tq $u^r = 0$. En tal caso, el menor r con esta propiedad es llamado el <u>índice de nilpotencia</u> de u.

<u>Ejemplo</u>: ① Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(k) \Rightarrow A^2 = 0$ y luego A es nilpotente de índice de nilpotencia 2.

② Si $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(k) \Rightarrow B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B^3 = 0$, y luego B es nilpotente de índice de nilpotencia 3.

<u>Lema</u>: Sea $u: V \to V$ un endomorfismo, donde $\dim_k(V) = n$. Entonces:

① u nilpotente $\Leftrightarrow m_u(X) = X^r$ para cierto $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.
Más aún, r es el índice de nilpotencia de u. En part, $u^n = 0$.

② Si u es nilpotente, 0 es el único valor propio de u.

③ Si u es nilpotente y diagonalizable $\Rightarrow u = 0$.

Dem: ① (⇒) Sup $u^r = 0$ con $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ índice de nilpotencia. Sea $P(X) = X^r$.
$\Rightarrow P(u) = 0$ y luego $m_u(X)$ divide $P(X) = X^r$ (por definición de m_u).
$\Rightarrow m_u(X) = X^m$ con $m \leq r$. Dado que $m_u(u) = u^m = 0$, tenemos $m = r$ por minimalidad de r ✓

① ($\Leftarrow$) Si $m_u(X) = X^r \Rightarrow m_u(u) = u^r = 0$ y luego u nilpotente ✓.
Dado que m_u divide P_u (Cayley-Hamilton) $\Rightarrow r = gr(m_u) \leq gr(P_u) = n$ y luego $u^n = 0$.

② Los valores propios de u son las raíces de $m_u(X) = X^r$, ie, $\lambda = 0$ ✓

③ u nilpotente $\Rightarrow m_u(X) = X^r$. En part, u diagonalizable $\Leftrightarrow r = 1$ (raíz simple) $\Rightarrow u = 0$. ∎

Ejemplo: Sea $A \in M_n(k)$ matriz triangular superior estricta, ie, de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & * & & * \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow P_A(X) = X^n$ y luego $P_A(A) = A^n = 0$. Más aún, A diagonalizable $\Leftrightarrow A = 0$.

Def: Sean $u: V \to V$ y $v: V \to V$ endomorfismos. Decimos que u y v conmutan si $u \circ v = v \circ u$.

Obs: Si u y v conmutan, el Teorema del binomio de Newton implica que para todo $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ se tiene que

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k} \circ v^k .$$

⚠ Si u y v no conmutan esto es falso (eg. $(u+v)^2 \neq u^2 + 2uv + v^2$ para $u = E_{12}$ y $v = E_{21}$ en $M_2(k)$)!

Lema: Sean $u: V \to V$ y $v: V \to V$ endomorfismos que conmutan. Entonces:

① Sea $\lambda \in k$ un valor propio de u. Entonces, V_λ y $V_{(\lambda)}$ son estables por v, ie, $v(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$ y $v(V_{(\lambda)}) \subseteq V_{(\lambda)}$.

② Si u y v son diagonalizables, $\exists\, \mathcal{B}$ base de V formada por vectores que son vectores propios de u y de v simultaneamente. En part, $u+v$ y uv son diagonalizables.

③ Si u y v son nilpotentes, entonces $u+v$ y uv son nilpotentes.

Dem: ① Sea $x \in V_\lambda$, entonces $u(v(x)) = v(\underbrace{u(x)}_{\lambda x}) = \lambda v(x) \Rightarrow v(x) \in V_\lambda$.
Del mismo modo, v y $P(u) = (u - \lambda Id_V)^{m_\lambda}$ conmutan, por lo que si $x \in V_{(\lambda)}$, ie, $x \in \ker P(u) \Rightarrow P(u)(v(x)) = v(\underbrace{P(u)(x)}_{=0}) = 0 \Rightarrow v(x) \in V_{(\lambda)}$ ✓

② Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in k$ los valores propios (distintos) de u y escribamos $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_p}$. Sea $\lambda = \lambda_j$ con $j \in \{1, \dots, p\}$ fijo. Queremos ver que V_λ admite una base $\mathcal{B}_\lambda$ formada por vectores propios de v.
Sean $\mu_1, \dots, \mu_r \in k$ los valores propios (distintos) de v. Dado que v es diagonalizable, todo $x \in V_\lambda$ se escribe como $x = x_1 + \dots + x_r$, con $x_i \in V_{\mu_i}$.

Inducción en r (n^o de valores propios de v): Si $r=1 \Rightarrow x = x_1 \in V_{\mu_1}$ y $x \in V_\lambda$ ✓

Sup. $r \geq 2$ y escribamos $x = x_1 + \ldots + x_r$ (de manera <u>única</u>) con $x_i \in V_{\mu_i}$.

$$\Rightarrow \tilde{x} := (v - \mu_r \mathrm{Id}_V)(x) = (v(x_1) - \mu_r x_1) + \ldots + (v(x_{r-1}) - \mu_r x_{r-1}) + \underbrace{(v(x_r) - \mu_r x_r)}_{=0}$$

$$= \underbrace{(\mu_1 - \mu_r)}_{\neq 0} x_1 + \ldots + \underbrace{(\mu_{r-1} - \mu_r)}_{\neq 0} x_{r-1}$$

Por ①, $v(V_\lambda) \subseteq V_\lambda \Rightarrow \tilde{x} \in V_\lambda$. Hip. de Inducción $\Rightarrow x_1, \ldots, x_{r-1} \in V_\lambda$.

Luego, $x_r = \underbrace{x}_{\in V_\lambda} - \underbrace{(x_1 + \ldots + x_{r-1})}_{\in V_\lambda} \in V_\lambda \Rightarrow$ Cada $x_i \in V_{\mu_i}$ pertenece a V_λ.

Así, V_λ admite una base $\mathcal{B}_\lambda$ formada por vectores propios x_i de v, que son <u>todos</u> vectores propios de u asociados a λ, ie, $x_i \in V_\lambda$.

$\Rightarrow \mathcal{B} = (\mathcal{B}_{\lambda_1}, \ldots, \mathcal{B}_{\lambda_p})$ es una base de V formada por vectores propios <u>comunes</u> de u y v. En part,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \lambda_p & \\ 0 & & & & \ddots \; \lambda_p \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \mu_1 & & \\ & & & \mu_r & \\ 0 & & & & \ddots \; \mu_r \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ En la base $\mathcal{B}$, $u+v$ y uv son diagonales ✓

③ Sup. que $u^r = 0$ y $v^s = 0$, para ciertos $r, s \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Como u y v conmutan, $(uv)^n = 0 = u^n v^n$ si $n \geq \max(r,s)$ ✓. Por otro lado,

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k v^{n-k}$$

para todo $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Luego, $u^k = 0$ (resp $v^{n-k} = 0$) si $k \geq r$ (resp. $n-k \geq s$). Así, para que $u^k v^{n-k}$ sea $\neq 0$ es necesario que $k \leq r-1$ y $n-k \leq s-1$ $\Rightarrow n \leq r+s-2$. En part, $(u+v)^{r+s-1} = 0$ ✓. ■

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ ① Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ en $M_2(\mathbb{R})$. Probar que $AB \neq BA$, que A y B son diagonalizables, pero $A+B$ y AB <u>no</u> lo son.

② Sean $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en $M_2(k)$. Probar que $E_{12}^2 = E_{21}^2 = 0$, pero $E_{12}E_{21} \neq E_{21}E_{12}$ y además $E_{12}E_{21} = E_{11}$ <u>no</u> es nilpotente, y $S = E_{21} + E_{12}$ tampoco es nilpotente.

(En part, si u y v <u>no</u> conmutan, las conclusiones del Lema son falsas).

<u>Teorema</u> (Descomposición de Dunford): Sea $u: V \to V$ un endomorfismo tq el polinomio característico P_u escinde sobre k. Entonces, u se descompone de manera <u>única</u> como:

$$u = u_s + u_n,$$

donde u_s es diagonalizable (o "<u>semi-simple</u>") y u_n es nilpotente. Más aún, u_s y u_n conmutan, ie, $u_s u_n = u_n u_s$.

↳ ⚠ También conocida como "Descomposición de Jordan-Chevalley"

<u>Dem</u>: <u>Existencia</u>: Vimos (pag. 47) que todo endomorfismo $u : V \to V$ tq P_u escinde sobre k admite una base $\mathcal{B}$ de V tq $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in M_n(k)$ es diagonal por bloques:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

donde cada bloque A_j posee sólo a $\lambda_j \in k$ como valor propio y verifica $(A_j - \lambda_j I_{m_j})^{m_j} = 0$ para $m_j \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ (la mult. de λ_j como raíz de m_u).

Sea $u_s : V \to V$ el endomorfismo con $S = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_s)$ dada por la matriz diagonal

$$S = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_p I_{m_p} \end{pmatrix}.$$

En part, u_s es diagonalizable. Sea $u_n := u - u_s$, cuya matriz $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_n)$ está dada por

$$N = \begin{pmatrix} A_1 - \lambda_1 I_{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_p - \lambda_p I_{m_p} \end{pmatrix}.$$

Dado que $(A_j - \lambda_j I_{m_j})^{m_j} = 0$, tenemos que $u_n^r = 0$ para $r \geq \max(m_1, \dots, m_p)$.

Finalmente, notar que $u_s|_{V(\lambda_j)} = \lambda_j \mathrm{Id}_{V(\lambda_j)}$ y que si $v \in V(\lambda_j) \Rightarrow u(v) \in V(\lambda_j)$

Luego, para $v \in V(\lambda_j)$ tenemos que $u(u_s(v)) = u(\lambda_j v) = \lambda_j u(v)$ y que $u_s(\underbrace{u(v)}_{\in V(\lambda_j)}) = \lambda_j u(v)$, ie, $u u_s = u_s u$ en $V(\lambda_j)$. Dado que $V = \bigoplus_{j=1}^{p} V(\lambda_j)$

$\Rightarrow u u_s = u_s u$ en V. Luego, $u_n u_s = (u - u_s) u_s = u u_s - u_s^2 = u_s u - u_s^2$
$= u_s (u - u_s) = u_s u_n$ ✓

<u>Unicidad</u>: Sea $u = u_s' + u_n'$ otra descomposición con las mismas propiedades.

Como u_s' y u_n' conmutan, $u_s' u = u u_s'$ y $u_n' u = u u_n'$. En part, por las propiedades de endomorfismos que conmutan (Lema en pag 49), tenemos que $u_s'(V(\lambda_j)) \subseteq V(\lambda_j)$ y $u_n'(V(\lambda_j)) \subseteq V(\lambda_j)$, ie, el espacio característico $V(\lambda_j)$ de u es estable por u_s' y u_n'. Dado que $u_s|_{V(\lambda_j)} = \lambda_j \mathrm{Id}_{V(\lambda_j)}$ es una homotecia, y $V = \bigoplus_{j=1}^{p} V(\lambda_j)$, $u_s u_s' = u_s' u_s$ y $u_s u_n' = u_n' u_s$.

En part, u_n' y u_s' conmutan con $u_n = u - u_s$.

Finalmente, como u_s y u_s' (resp. u_n y u_n') conmutan y son diagonalizables (resp. nilpotentes) $\Rightarrow u_s - u_s'$ es diagonalizable y $u_n' - u_n$ es nilpotente.

Así, $u = u_s + u_n = u_s' + u_n' \Rightarrow u_s - u_s' = u_n' - u_n$ es un endomorfismo diagonalizable y nilpotente, luego debe ser <u>nulo</u>, ie, $u_s = u_s'$ y $u_n = u_n'$ ■