§19. Trigonalización y Teorema de Cayley-Hamilton

Def: Sea $u: V \to V$ un endomorfismo, donde $\dim_k(V) = n$. Decimos que u es trigonalizable si existe una base $\mathcal{B}$ de V en la cual la matriz $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in M_n(k)$ es triangular superior. Diremos que una matriz $A \in M_n(k)$ es trigonalizable si la aplicación lineal asociada $u_A: k^n \to k^n$, $x \mapsto Ax$ lo es, ie, si $\exists P \in Gl_n(k)$ tq $P^{-1}AP$ es triangular superior.

Ejercicio Sea $u: V \to V$ endomorfismo y $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ una base de V. Probar que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ es triangular superior $\iff$ $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$ es triangular inferior, donde $\mathcal{C} = (e_n, e_{n-1}, \dots, e_1)$.

En part, podríamos reemplazar "superior" por "inferior" en la definición anterior.

Ejemplo: Sea $u: V \to V$ endomorfismo trigonalizable y sea $\mathcal{B}$ una base de V tq $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ es triangular superior, ie,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow P_A(X) = \det(XI_n - A) = (X - a_{11})(X - a_{22}) \cdots (X - a_{nn})$ y luego los valores propios de A (o equivalentemente, de u) son los términos diagonales a_{ii}.
En part, $P_u \in k[X]$ escinde sobre k.

Teorema: Sea $u: V \to V$ un endomorfismo, donde $\dim_k(V) = n$. Entonces: u es trigonalizable $\iff$ su polinomio característico $P_u \in k[X]$ escinde sobre k.

Dem: Inducción en n: Toda matriz 1×1 es triangular $(n=1)$ ✓

Sup. $n \geq 2$ y sea $P_u(X) = \prod_{j=1}^{n}(X - \lambda_j)$, donde $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$ son los valores propios de u (no necesariamente distintos).

Dado que $\lambda_n \in k$ es un valor propio de u, el endomorfismo $u - \lambda_n\, id_V$ no es inyectivo, y luego no es sobreyectivo (pues $\dim_k(V)$ es finita).

Sea $W := \mathrm{Im}(u - \lambda_n\, id_V) \subsetneq V \Rightarrow r := \dim_k(W) = rg(u - \lambda_n\, id_V) < n$.

Si $(e_1', \dots, e_r')$ es una base de W, la completamos en una base $\mathcal{B}' = (e_1', \dots, e_n')$ de V, y definimos $\mathcal{U} := \mathrm{Vect}_k(e_1', \dots, e_{n-1}')$.

Notar que $W \subseteq \mathcal{U}$ y que para todo $j \in \{1, \dots, n-1\}$ tenemos que:

$$u(e_j') = u(e_j') - \lambda_n e_j' + \lambda_n e_j' = \underbrace{(u - \lambda_n id_V)(e_j')}_{\in W} + \underbrace{\lambda_n e_j'}_{\in \mathcal{U}} \Rightarrow u(e_j') \in \mathcal{U}.$$

Más aún, $u(e_n') = \underbrace{(u - \lambda_n id_V)(e_n')}_{\in \mathcal{U}} + \lambda_n e_n' \Rightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$,

donde $A \in M_{n-1}(k)$ y $C \in k^{n-1}$ es una columna $\Rightarrow P_u(X) = P_A(X) \cdot (X - \lambda_n)$.

Luego, $P_A(X) = \prod_{j=1}^{n-1}(X - \lambda_j)$ escinde sobre k $\underset{\text{Hip. Inducción}}{\Rightarrow}$ $u|_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ es trigonalizable, ie, $\exists\, (e_1, \dots, e_{n-1})$ base de $\mathcal{U}$ tq $A' = \mathrm{Mat}_{(e_1, \dots, e_{n-1})}(u|_{\mathcal{U}})$ es triangular superior. Luego, si $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_{n-1}, e_n') \Rightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ triang. superior. ∎

Corolario: Sean $A \in M_n(\mathbb{C})$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ los valores propios de A (no necesariamente distintos). Entonces, $\det(A) = \prod_{j=1}^{n} \lambda_m$ y $tr(A) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_m$.

Dem: El polinomio $P_A(X) = (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_n)$ escinde sobre $\mathbb{C}$ (Teo. Fund. del Álgebra)
$\Rightarrow A$ es trigonalizable, ie, $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $B := P^{-1}AP$ triangular superior.
Visto: $P_B(X) = P_A(X)$ y luego $tr(A) = tr(B)$ y $\det(A) = \det(B)$.
Por otro lado, los términos diagonales de B son exactamente las raíces de $P_B = P_A$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow tr(A) = tr(B) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$$
$$\text{y } \det(A) = \det(B) = \lambda_1 \cdots \lambda_n. \blacksquare$$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $A \in GL_n(k)$ matriz triangular superior invertible con términos diagonales $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$. Probar que A^{-1} es triangular superior y determinar sus términos diagonales. Deducir que si $u: V \to V$ es un automorfismo de V (ie, $u \in GL(V)$) tq $P_u(X) = \prod_{j=1}^{n}(X-\lambda_j)$ escinde sobre k, entonces:

$$\det(u^{-1}) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j} \quad \text{y} \quad tr(u^{-1}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j}.$$

Recuerdo: Si $u \in End_k(V)$ y $P \in k[X]$ dado por $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_d X^d$
$\Rightarrow P(u) \in End_k(V)$ está dado por $P(u) = a_0 \, id_V + a_1 u + \dots + a_d u^d$.
Más aún, si V es de dimensión finita: $\forall u \in End_k(V)$, $\exists P \in k[X] - \{0\}$ tq $P(u) = 0$.

Teorema de Cayley-Hamilton: Sea $u: V \to V$ endomorfismo, entonces $P_u(u) = 0$.

Dem: Sea $\mathcal{B}$ una base de V y sea $A = Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(k)$.
Entonces, $P_u(u) = 0 \Leftrightarrow P_A(A) = 0$. Para esto último, consideremos:
$B := X I_n - A \in M_n(k(X))$, ie, $B = (b_{ij})$ con $b_{ij} = \begin{cases} X - a_{ii} & \text{si } i = j \\ -a_{ij} & \text{si } i \neq j \end{cases}$

y sea $C := {}^t com(B)$ comatriz transpuesta. Dado que cada cofactor de B es un polinomio de grado $\leq n-1$, podemos escribir

$$C = \sum_{j=0}^{n-1} X^j C_j = C_0 + X C_1 + X^2 C_2 + \dots + X^{n-1} C_{n-1}$$

donde $C_j \in M_n(k)$. Por otro lado, $B \cdot \underbrace{{}^t com(B)}_{=C} = \underbrace{\det(B)}_{P_A(X)} I_n$.

Luego, si $P_A(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ entonces:

$$B \cdot C = (X I_n - A)(C_0 + X C_1 + \dots + X^{n-1} C_{n-1}) = X^n C_{n-1} + X^{n-1}(C_{n-2} - A C_{n-1}) + \dots + X(C_0 - AC_1) + (-AC_0)$$

$$\| $$

$$P_A(X) I_n = X^n I_n + X^{n-1} a_{n-1} I_n + \dots + a_0 I_n$$

$\Rightarrow a_0 I_n = -AC_0$; $a_1 I_n = C_0 - AC_1$; ... ; $a_{n-1} I_n = C_{n-2} - AC_{n-1}$; $a_n I_n = I_n = C_{n-1}$

Por lo tanto:

$$P_A(A) = \sum_{j=0}^{n} a_j A^j = \sum_{j=0}^{n} A^j (a_j I_n) = a_0 I_n + A \cdot (a_1 I_n) + \dots + A^{n-1}(a_{n-1} I_n) + \overbrace{A^n C_{n-1}}^{= A^n}$$

$$= -AC_0 + A(C_0 - AC_1) + \dots + A^{n-1}(C_{n-2} - AC_{n-1}) + A^n C_{n-1} = 0 \quad \text{("suma telescópica")} \blacksquare$$

Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Entonces $P_A(X) = \begin{vmatrix} X & -1 \\ -2 & X-3 \end{vmatrix} = X^2 - 3X - 2$.

Cayley-Hamilton: $A^2 - 3A - 2I_2 = 0$. En efecto, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^2 - 3A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 11 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ✓

Usos típicos de Cayley-Hamilton: Como $A^2 - 3A - 2I_2 = 0$ $(*)$

$\Rightarrow A^2 = 3A + 2I_2$, $A^3 = 3A^2 + 2A \overset{(*)}{=} 3(3A + 2I_2) + 2A = 11A + 6I_2$, etc.

Notar que $\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 2 \neq 0$, ie, $A \in GL_2(\mathbb{R})$.

Multiplicando $(*)$ por A^{-1}: $A - 3I_2 - 2A^{-1} = 0 \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{A - 3I_2}{2} = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

§20. Polinomio minimal

Sea V un k-e.v. de dimensión finita y $u: V \to V$ un endomorfismo. Sabemos que siempre $\exists\, P \in k[X]$ no-nulo tq $P(u) = 0$ en $\mathrm{End}_k(V)$.

Prop: Sea $u: V \to V$ un endomorfismo. Entonces, existe un único polinomio unitario $m_u \in k[X]$ tq para todo polinomio $P \in k[X]$ se cumple que:

$$P(u) = 0 \iff m_u \text{ divide a } P.$$

Diremos que m_u es el polinomio minimal de u.

Dem: El sub-conjunto $I = \{P \in k[X] \text{ tq } P(u) = 0\} \subseteq k[X]$ es un ideal:

(i) Si $\lambda \in k$ y $P, Q \in I \Rightarrow \lambda P + Q \in I$ pues $(\lambda P + Q)(u) = \lambda P(u) + Q(u) = 0$

Luego, I es un sub-e.v. de $k[X]$.

(ii) Si $P \in I$ y $Q \in k[X] \Rightarrow PQ \in I$ pues $(PQ)(u) = \underbrace{P(u)}_{=0} Q(u) = 0$.

Más aún, $I \neq \{0\}$ (ver §7). $\overset{(§18)}{\Longrightarrow} \exists!\, m_u \in k[X]$ polinomio unitario tq

$I = \langle m_u \rangle$, ie, $\forall P \in k[X]$ se tiene que $P(u) = 0 \iff P \in I = \langle m_u \rangle$

$\iff P = m_u Q$ para cierto $Q \in k[X]$ ∎

Terminología: Si $A \in M_n(k)$, definimos el polinomio minimal de A como el polinomio minimal $m_A \in k[X]$ del endomorfismo $u_A: k^n \to k^n$, $x \mapsto Ax$ asociado.

Ejercicio importante Sea $u: V \to V$ un endomorfismo. Probar que:

$\mathrm{gr}(m_u) = 1$, ie, $m_u(X) = X - \lambda$ para cierto $\lambda \in k \iff u = \lambda\, \mathrm{id}_V$ (homotecia).

En part, $m_u(X) = X \iff u = 0$.

Teorema de Cayley-Hamilton (reformulación): Sea $u: V \to V$ un endomorfismo, entonces el polinomio minimal m_u divide al polinomio característico P_u.

Ejemplos: (1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(k)$ verifica $A^2 = 0$. Luego m_A divide $P(X) = X^2$.

Dado que $A \neq 0$, $m_A(X) \neq X$ y luego $m_A(X) = X^2$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ verifica $P_A(X) = X^2 - 3X - 2$. Como A no es una homotecia, $\mathrm{gr}(m_A) \geq 2 \underset{\text{Cayley-Hamilton}}{\Longrightarrow} m_A(X) = P_A(X)$.