③ Si $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$ es una matriz triangular (superior o inferior), entonces $XI_n - A$ lo es también $\Rightarrow P_A(X) = (X - a_{11}) \cdots (X - a_{nn})$ y luego los valores propios de A son sus términos diagonales. En part, si los coeficientes a_{ii} son todos distintos $\Rightarrow$ A diagonalizable.

[Teorema Fundamental del Álgebra (Argand, 1806): Todo polinomio $P \in \mathbb{C}[X]$ con coeficientes complejos de grado ≥ 1 posee al menos una raíz en $\mathbb{C}$.

Corolario: Toda matriz compleja $A \in M_n(\mathbb{C})$ tiene un valor propio en $\mathbb{C}$.

Dem: $P_A(X) = \det(XI_n - A) \in \mathbb{C}[X]$ es de grado $n \geq 1$ y luego $\exists\, \lambda \in \mathbb{C}$ tq $P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda$ valor propio de A. ■

⚠ Si k es un cuerpo arbitrario, el teorema de Steinitz (1910), afirma que existe un cuerpo $\overline{k}$ tq $k \subseteq \overline{k}$ y tal que todo $P \in \overline{k}[X]$ no constante posee una raíz en $\overline{k}$; $\overline{k}$ es la clausura algebraica de k.

§17. Polinomio característico de un endomorfismo

Sea $u : V \to V$ un endomorfismo y sea $\mathcal{B}$ una base de V. Si denotamos $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in M_n(k)$, entonces $\det(\lambda\, id_V - u) = \det(\lambda I_n - A)$ para todo $\lambda \in k$.
En part, los valores propios de u son los valores propios de su matriz asociada respecto a cualquier base.
Más aún, dado que A y B son semejantes (ie, $\exists\, P \in Gl_n(k)$ tq $P^{-1}AP = B$) si y sólo si representan un mismo endomorfismo (ie, $\exists\, u : V \to V$ y bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ de V tq $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ y $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$), se tiene que matrices semejantes tienen los mismos valores propios.

El resultado siguiente generaliza la discusión anterior:

[Teorema: Matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico.

Dem: Basta probar que si $A, B \in M_n(k)$ son semejantes, entonces $XI_n - A$ y $XI_n - B$ son semejantes en $M_n(k(X))$.
Sup. que $\exists\, P \in Gl_n(k)$ tq $B = P^{-1}AP$, entonces

$$P^{-1}(XI_n - A)P = P^{-1}(XI_n)P - P^{-1}AP = XI_n - B,$$

y luego $XI_n - A$ y $XI_n - B$ tienen el mismo determinante ■

[Corolario: Sea $u : V \to V$ endomorfismo, $\mathcal{B}$ una base de V y $A = (a_{ij}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Entonces, el polinomio característico de u, $P_u \in k[X]$, dado por la expresión

$$P_u(X) = \det(X\, id_V - u) = \det(XI_n - A) = X^n - \mathrm{tr}(u)X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(u)$$

está bien definido, donde $n = \dim_k(V)$ y el coeficiente $\mathrm{tr}(u)$ es la traza de u, que coincide con $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ (y no depende de la base $\mathcal{B}$). ■

Ejercicio: Sean $A, B \in M_n(k)$. Probar (por definición) que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.