Corolario: Sup. que $\dim_k(V) = n$ y sea $u: V \to V$ endomorfismo. Si u posee n valores propios distintos $\Rightarrow$ u es diagonalizable.

Dem: Con la notación anterior: $p \geq n$. Además, $\dim(V_{\lambda_j}) \geq 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{p} \dim_k(V_{\lambda_j}) \geq n$ ■

Obs: El recíproco es falso (e.g. $u = \lambda \, id_V \Rightarrow V_\lambda = V$, pero $p = 1$).

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $u: V \to V$ diagonalizable. Probar que $\lambda \in k$ es el único valor propio de $u \iff u = \lambda \, id_V$ es una homotecia.

§16. Polinomio característico de una matriz cuadrada

Recuerdo: Si $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$, entonces $u = u_A : k^n \to k^n$, $e_j \mapsto u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ es el endomorfismo de k^n asociado a A, donde $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base canónica.

Def: Sea $A \in M_n(k)$. Los valores y vectores propios de A son aquellos del endomorfismo $u: k^n \to k^n$ asociado. En otras palabras, $\lambda \in k$ es un valor propio de A si $\exists v \in k^n$ con $v \neq 0$ y tal que $Av = \lambda v$; el vector v es un vector propio de A asociado a λ.

Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ y sea $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Av = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Luego, $v \neq 0$ es un vector propio asociado a $\lambda = 3$.

Def: Decimos que $A \in M_n(k)$ es diagonalizable si $u_A : k^n \to k^n$ lo es. Es decir, si $\exists P \in GL_n(k)$ tq $P^{-1}AP = D$ es una matriz diagonal.

Luego, todas las propiedades discutidas en §15. valen para matrices, por ejemplo: "Toda matriz $A \in M_n(k)$ con n valores propios distintos es diagonalizable".

O bien, otro ejemplo:

Prop: Sea $A \in M_n(k)$. Un escalar $\lambda \in k$ es un valor propio de A si y sólo si $\det(\lambda I_n - A) = 0$.

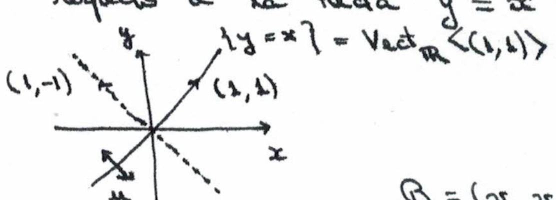
Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1) = 0 \iff \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1.$$

Luego, A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$, pues posee dos valores propios distintos.

Alternativamente: $u_A(x,y) = (y,x)$, pues $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow$ Geométricamente, A (o bien, siendo estrictos, u_A) es la reflexión en $\mathbb{R}^2$ respecto a la recta $y = x$:



Observamos (geométricamente), que $v_1 = (1,1)$ y $v_2 = (1,-1)$ son vectores propios de A, asociados a $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$, resp.

$\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ es una base de $\mathbb{R}^2$, pues $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

En el ejemplo anterior se puede apreciar que para hallar los valores propios de $A \in M_n(k)$ hay que resolver una ecuación polinomial. Esto se formaliza de la manera siguiente:

A partir del anillo de polinomios $k[X]$ podemos formar un "cuerpo de fracciones" (cf. $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$) cuyos elementos son de la forma $\frac{P(X)}{Q(X)}$ con $P, Q \in k[X]$ y donde $\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{R(X)}{S(X)} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} PS = RS$ en $k[X]$.

Dicho cuerpo se llama el <u>cuerpo de funciones racionales</u> en la variable X y se denota $k(X)$.

Todo lo que hemos discutido hasta ahora es válido sobre <u>cualquier cuerpo</u> (¡!), en particular sobre el cuerpo $K = k(X)$. Notar que $k \subseteq k(X)$ <u>sub-cuerpo</u>.

Sea $A \in M_n(k)$ y consideremos la matriz en $M_n(k(X))$ dada por:

$$X I_n - A = \begin{pmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & X - a_{nn} \end{pmatrix}$$

ie, una matriz con coeficientes dados por polinomios en $k[X]$.

<u>Lema útil</u>: Sea $P \in k[X]$ dado por

$$P(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n) = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 .$$

Entonces:

$$a_{n-1} = -\lambda_1 - \lambda_2 - \ldots - \lambda_n$$

$$a_{n-2} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \ldots + \lambda_2\lambda_3 + \ldots + \lambda_{n-1}\lambda_n = \sum_{1 \le i < j \le n} \lambda_i \lambda_j .$$

$$\vdots$$

$$a_1 = (-1)^{n-1}(\lambda_2\lambda_3 \cdots \lambda_n + \lambda_1\lambda_3\lambda_4 \cdots \lambda_n + \ldots + \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_{n-1}) = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} \lambda_j$$

$$a_0 = (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n .$$

<u>Dem</u>: Comparar los coeficientes ■

<u>Teorema</u>: Sea $A \in M_n(k)$. El determinante $\det(X I_n - A)$ es un polinomio en $k[X]$ que es unitario (ie, coeficiente principal 1) y de grado n. Dicho polinomio es llamado el <u>polinomio característico</u> de A y lo denotamos P_A. Más aún, $P_A(X) = X^n - \operatorname{tr}(A) X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(A)$, donde

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + \ldots + a_{nn}$$

es la <u>traza</u> de A, ie, la suma de los términos diagonales de A.

<u>Dem</u>: Escribamos $X I_n - A = (b_{ij}) \in M_n(k(X))$, ie, $b_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{si } i \neq j \\ X - a_{ii} & \text{si } i = j \end{cases}$.

$$\Rightarrow P_A(X) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)}$$

Dado que cada $b_{ij} \in k[X]$ es un polinomio $\Rightarrow P_A(X)$ es un polinomio ✓
El término de grado maximal en X es aquel que corresponde al producto de los términos de la diagonal, ie, $\sigma = id$:

$$\underbrace{\varepsilon(id)}_{=1} b_{11} \cdots b_{nn} = (X - a_{11}) \cdots (X - a_{nn}) = X^n + \dots$$

$\Rightarrow P_A$ es unitario de grado n.

Del mismo modo, para tener un término con X^{n-1} hay que tomar $n-1$ términos diagonales: $\varepsilon(\sigma)\, b_{11} \cdots b_{i-1,i-1}\, b_{i\sigma(i)}\, b_{i+1,i+1} \cdots b_{nn}$.
Dado que $\sigma(j) = j$ para $j \neq i$ y $\sigma \in S_n$ biyección, necesariamente $\sigma(i) = i$, ie, $\sigma = id \Rightarrow b_{11} \cdots b_{nn} = (X - a_{11})(X - a_{22}) \cdots (X - a_{nn})$

$$\underset{\text{lema útil}}{=} X^n - \underbrace{(a_{11} + \dots + a_{nn})}_{tr(A)} X^{n-1} + \dots + (-1)^n a_{11} \cdots a_{nn}.$$

Finalmente, si escribimos $P_A(X) = X^n - tr(A) X + \dots + a_1 X + a_0$
$\Rightarrow P_A(0) = det(-A) = (-1)^n det(A) = a_0$. ■

<u>Ejemplos</u>:

① Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(k)$, reflexión respecto a la recta $y = x$ en k^2.
$\Rightarrow P_A(X) = det(XI_2 - A) = \begin{vmatrix} X & -1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$ tiene raíces $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ sobre todo cuerpo k.
Si $car(k) = 2$: $\lambda_1 = \lambda_2$; pero si $car(k) \neq 2$: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y luego A es diagonalizable en tal caso.

② Sea $r_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación en ángulo $\theta \in \mathbb{R}$, cuya matriz en la base canónica está dada por $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

$$\Rightarrow P_{A_\theta}(X) = \begin{vmatrix} X - \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & X - \cos\theta \end{vmatrix} = (X^2 - \cos\theta)^2 - (-\sin^2\theta)$$

$$= X^2 - 2\cos\theta X + \underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{=1} = X^2 - 2\cos\theta X + 1.$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4\cos^2\theta - 4 = -4\sin^2\theta \leq 0$
Luego, P_{A_θ} posee raíces en $\mathbb{R} \Leftrightarrow \sin\theta = 0 \Leftrightarrow \theta \equiv 0 \pmod{\pi}$.

⚠ Si pensamos $A_\theta \in M_2(\mathbb{C})$ como matriz con coeficientes <u>complejos</u>, entonces las raíces de P_{A_θ} están dadas por $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2\cos\theta \pm 2i\sin\theta}{2} = e^{\pm i\theta}$
$\Rightarrow \lambda_1 = e^{i\theta}$ y $\lambda_2 = e^{-i\theta}$ valores propios.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ son vectores propios y luego A_θ es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$.

③ Si $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$ es una matriz triangular (superior o inferior), entonces $XI_n - A$ lo es también $\Rightarrow P_A(X) = (X - a_{11}) \cdots (X - a_{nn})$ y luego los valores propios de A son sus términos diagonales. En part, si los coeficientes a_{ii} son todos distintos $\Rightarrow$ A diagonalizable.

Teorema Fundamental del Álgebra (Argand, 1806): Todo polinomio $P \in \mathbb{C}[X]$ con coeficientes complejos de grado ≥ 1 posee al menos una raíz en $\mathbb{C}$.

Corolario: Toda matriz compleja $A \in M_n(\mathbb{C})$ tiene un valor propio en $\mathbb{C}$.

Dem: $P_A(X) = \det(XI_n - A) \in \mathbb{C}[X]$ es de grado $n \geq 1$ y luego $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ tq $P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda$ valor propio de A. ■

⚠ Si k es un cuerpo arbitrario, el teorema de Steinitz (1910), afirma que existe un cuerpo $\overline{k}$ tq $k \subseteq \overline{k}$ y tal que todo $P \in \overline{k}[X]$ no constante posee una raíz en $\overline{k}$; $\overline{k}$ es la clausura algebraica de k.

§17. Polinomio característico de un endomorfismo

Sea $u : V \to V$ un endomorfismo y sea $\mathcal{B}$ una base de V. Si denotamos $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in M_n(k)$, entonces $\det(\lambda\, id_V - u) = \det(\lambda I_n - A)$ para todo $\lambda \in k$. En part, los valores propios de u son los valores propios de su matriz asociada respecto a cualquier base.

Más aún, dado que A y B son semejantes (ie, $\exists P \in Gl_n(k)$ tq $P^{-1}AP = B$) si y sólo si representan un mismo endomorfismo (ie, $\exists u : V \to V$ y bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ de V tq $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ y $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$), se tiene que matrices semejantes tienen los mismos valores propios.

El resultado siguiente generaliza la discusión anterior:

Teorema: Matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico.

Dem: Basta probar que si $A, B \in M_n(k)$ son semejantes, entonces $XI_n - A$ y $XI_n - B$ son semejantes en $M_n(k(X))$.

Sup. que $\exists P \in Gl_n(k)$ tq $B = P^{-1}AP$, entonces

$$P^{-1}(XI_n - A)P = P^{-1}(XI_n)P - P^{-1}AP = XI_n - B,$$

y luego $XI_n - A$ y $XI_n - B$ tienen el mismo determinante ■

Corolario: Sea $u : V \to V$ endomorfismo, $\mathcal{B}$ una base de V y $A = (a_{ij}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Entonces, el polinomio característico de u, $P_u \in k[X]$, dado por la expresión

$$P_u(X) = \det(X\, id_V - u) = \det(XI_n - A) = X^n - \mathrm{tr}(u)X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(u)$$

está bien definido, donde $n = \dim_k(V)$ y el coeficiente $\mathrm{tr}(u)$ es la traza de u, que coincide con $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ (y no depende de la base $\mathcal{B}$). ■

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sean $A, B \in M_n(k)$. Probar (por definición) que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.