Prop: Los sub-espacios propios de un endomorfismo asociados a valores propios distintos están en suma directa.

Dem: Por inducción en el número p de valores propios: $p=1$ ✓

Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ valores propios de $u: V \to V$ tq $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$.

Queremos probar que $\rho: V_{\lambda_1} \times \dots \times V_{\lambda_p} \to V$, $(v_1, \dots, v_p) \mapsto v_1 + \dots + v_p$ es inyectiva, ie, si $v_1 + \dots + v_p = 0 \Rightarrow v_1 = \dots = v_p = 0$.

Al aplicar u a la ecuación $v_1 + \dots + v_p = 0$ obtenemos $0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$.

Si restamos $\lambda_1(v_1 + \dots + v_p) = 0$, obtenemos $(\lambda_2 - \lambda_1) v_2 + \dots + (\lambda_p - \lambda_1) v_p = 0$.

$\underset{\text{Hip. Inducción}}{\Longrightarrow}$ $V_{\lambda_2}, \dots, V_{\lambda_p}$ están en suma directa y luego $(\lambda_j - \lambda_1) v_j = 0$ para $j = 2, \dots, p$. Como $\lambda_1 \neq \lambda_j \Rightarrow v_2 = \dots = v_p = 0$ y luego $v_1 = 0$ ∎

Obs: Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ los valores propios (<u>distintos</u>) de $u: V \to V$. Entonces, $V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_p} := \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_p}) = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_p}$, pero <u>no</u> necesariamente $V = \bigoplus_{j=1}^{p} V_{\lambda_j}$. <u>Más adelante</u>: $V = \bigoplus_{j=1}^{p} V_{\lambda_j} \iff u$ es "diagonalizable".

<u>Corolario</u>: El número p de valores propios de $u: V \to V$ es $\leq \dim_{\mathbb{K}}(V)$.

<u>Dem</u>: Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ los valores propios de u. Luego: $\bigoplus_{j=1}^{p} V_{\lambda_j} \subseteq V$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{K}}(V_{\lambda_1}) + \dots + \dim_{\mathbb{K}}(V_{\lambda_p}) = \dim_{\mathbb{K}}\left(\bigoplus_{j=1}^{p} V_{\lambda_j}\right) \leq \dim_{\mathbb{K}}(V)$.

Dado que $\dim_{\mathbb{K}}(V_{\lambda_j}) \geq 1$ (pues $\exists\, 0 \neq v \in V_{\lambda_j}$ vector propio) $\Rightarrow p \leq \dim_{\mathbb{K}}(V)$ ∎

<u>§15. Endomorfismos diagonalizables</u>

Def: Un endomorfismo $u: V \to V$ es <u>diagonalizable</u> si existe una base de V formada por vectores propios de u.

Obs: Si $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ es una base de V forma por vectores propios de u.

$$\Rightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \text{donde } u(v_j) = \lambda_j v_j.$$

Recíprocamente, si $\exists\, \mathcal{B}$ base de V tq $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ es diagonal, entonces necesariamente los vectores de $\mathcal{B}$ son vectores propios de u.

Prop: Sea $u: V \to V$ endomorfismo y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ los valores propios distintos de u. Son equivalentes:

① u es diagonalizable.

② $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_p}$.

③ $\dim_{\mathbb{K}}(V_{\lambda_1}) + \dots + \dim_{\mathbb{K}}(V_{\lambda_p}) \geq \dim_{\mathbb{K}}(V)$.

<u>Dem</u>: ③ $\Rightarrow$ ②: Vimos que $\rho: V_{\lambda_1} \times \dots \times V_{\lambda_p} \to V$ inyectiva. Si ③ se verifica entonces ρ biyectiva $\Rightarrow$ ② ✓

② $\Rightarrow$ ①: Sea $\mathcal{B}_j$ base de V_{λ_j} $\overset{②}{\Rightarrow}$ $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ base de V formada por valores propios $\Rightarrow$ ① ✓

① $\Rightarrow$ ③: Sea $\mathcal{B}$ base de vectores propios y sea n_j el número de vectores de $\mathcal{B}$ asociados a λ_j $\Rightarrow \dim_{\mathbb{K}}(V_{\lambda_j}) \geq n_j \Rightarrow \dim_{\mathbb{K}}(V_{\lambda_1}) + \dots + \dim_{\mathbb{K}}(V_{\lambda_p}) \geq n_1 + \dots + n_p = \dim_{\mathbb{K}}(V)$ ∎

Corolario: Sup. que $\dim_k(V) = n$ y sea $u: V \to V$ endomorfismos. Si u posee n valores propios distintos $\Rightarrow$ u es diagonalizable.

Dem: Con la notación anterior: $p \geq n$. Además, $\dim(V_{\lambda_j}) \geq 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{p} \dim_k(V_{\lambda_j}) \geq n$ ∎

Obs: El recíproco es falso (e.g. $u = \lambda \, id_V \Rightarrow V_\lambda = V$, pero $p = 1$).

Ejercicio Sea $u: V \to V$ diagonalizable. Probar que $\lambda \in k$ es el único valor propio de $u \iff u = \lambda \, id_V$ es una homotecia.

§16. Polinomio característico de una matriz cuadrada

Recuerdo: Si $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$, entonces $u = u_A : k^n \to k^n$, $e_j \mapsto u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ es el endomorfismo de k^n asociado a A, donde $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base canónica.

Def: Sea $A \in M_n(k)$. Los valores y vectores propios de A son aquellos del endomorfismo $u: k^n \to k^n$ asociado. En otras palabras, $\lambda \in k$ es un valor propio de A si $\exists\, v \in k^n$ con $v \neq 0$ y tal que $Av = \lambda v$; el vector v es un vector propio de A asociado a λ.

Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ y sea $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Av = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Luego, $v \neq 0$ es un vector propio asociado a $\lambda = 3$.

Def: Decimos que $A \in M_n(k)$ es diagonalizable si $u_A : k^n \to k^n$ lo es. Es decir, si $\exists\, P \in Gl_n(k)$ tq $P^{-1}AP = D$ es una matriz diagonal.

Luego, todas las propiedades discutidas en §15. valen para matrices, por ejemplo: "Toda matriz $A \in M_n(k)$ con n valores propios distintos es diagonalizable". O bien, otro ejemplo:

Prop: Sea $A \in M_n(k)$. Un escalar $\lambda \in k$ es un valor propio de A si y sólo si $\det(\lambda I_n - A) = 0$.

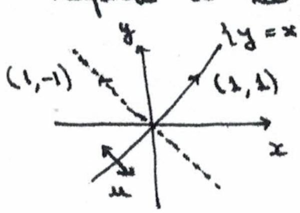
Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1) = 0 \iff \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1.$$

Luego, A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$, pues posee dos valores propios distintos.

Alternativamente: $u_A(x,y) = (y,x)$, pues $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow$ Geométricamente, A (o bien, siendo estrictos, u_A) es la reflexión en $\mathbb{R}^2$ respecto a la recta $y = x$:



Observamos (geométricamente), que $v_1 = (1,1)$ y $v_2 = (1,-1)$ son vectores propios de A, asociados a $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$, resp.

$\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ es una base de $\mathbb{R}^2$, pues $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.