§14. Valores y vectores propios

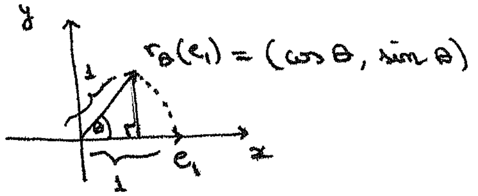
Motivación: sea $u : V \to V$ endomorfismo. Nos gustaría hallar una base $\mathcal{B}$ de V tq $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in M_n(k)$ sea lo más "simple" posible.

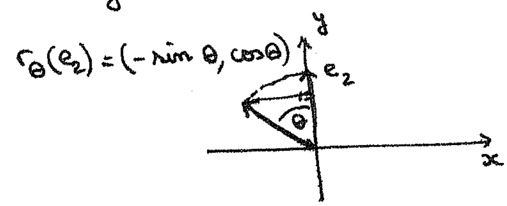
Por ejemplo, si $\exists\, \mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ tq $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ es diagonal, entonces $u(v_i) = \lambda_i v_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, ie, v_i y $u(v_i)$ son colineales.

Notar que en tal caso podemos calcular fácilmente $\det(u) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ y $A^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^m \end{pmatrix}$ $\forall m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, por ejemplo.

Lamentablemente, esto no siempre es posible:

Ejemplo: Sea $V = \mathbb{R}^2$ con base canónica $\mathcal{B} = \left(e_1 = \binom{1}{0}, e_2 = \binom{0}{1}\right)$, y sea $r_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación (anti-horaria) en ángulo θ:





$$\Rightarrow A_\theta = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Veremos que r_θ no posee vectores propios a menos que $\theta \equiv 0 \pmod{\pi}$.

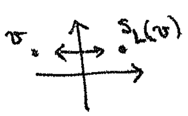
Def: Sea $u : V \to V$ endomorfismo. Si existe un escalar $\lambda \in k$ y un vector $v \in V$, $v \neq 0$, tal que $u(v) = \lambda v$, decimos que λ es un valor propio (o eigenvalor) y que v es un vector propio (o eigenvector) asociado a λ.

Obs: Todo múltiplo $\neq 0$ de un vector propio es de nuevo un vector propio, asociado al mismo valor propio. En part, los vectores propios no son únicos!

Ejemplos:

1) $V = \mathbb{R}^2$, $r_\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rotación en π $\Rightarrow A_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
ie, $r_\pi(x,y) = (-x,-y)$ en coordenadas. $\Rightarrow e_1 = \binom{1}{0}$ y $e_2 = \binom{0}{1}$ son vectores propios asociados al valor propio $\lambda = -1$.

2) $V = \mathbb{R}^2$, $S_L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (-x,y)$ simetría resp. a la recta $L = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(e_2)$



e_1 v.p. asociado a $\lambda_1 = -1$
e_2 v.p. asociado a $\lambda_2 = 1$.

3) $V = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ clase } \mathcal{C}^\infty\}$. y $u : V \to V$, $f \mapsto f'$.
La función $f(t) = e^{\lambda t}$ es un v.p. asociada al valor propio λ : $f' = \lambda f$.

4) $V = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y $u : V \to V$, $f \mapsto f'' + f$.
Dados $a, b \in \mathbb{R}$ (no ambos nulos), la función $f_{a,b}(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$ es un v.p. asociado a $\lambda = 0$ $\Rightarrow f_{a,b}(t) \in \ker(u)$.
MAT023: Verán que $\ker(u) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\langle \cos(t), \sin(t)\rangle \cong \mathbb{R}^2$.

Terminología: Sea $u : V \to V$ endomorfismo. El conjunto (eventualmente vacío) de valores propios de u es denotado $\sigma(u) \subseteq k$ y es llamado el espectro de u: $\sigma(u) = \{\lambda \in k \text{ tq } \exists v \neq 0 \text{ con } u(v) = \lambda v\}$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $u \in \mathrm{End}_k(V)$ y $v \in V$ un vector propio asociado al valor propio $\lambda \in k$. Probar que $\forall Q \in k[X]$ se tiene que $Q(u)(v) = Q(\lambda) v$.

Def: Sea $u : V \to V$ endomorfismo y $\lambda \in k$ un valor propio de u. El sub-e.v.

$$V_\lambda := \ker(\lambda \, id_V - u) \subseteq V$$

es llamado el sub-espacio propio asociado a λ.

Obs: Notar que $u(v) = \lambda v = \lambda \, id_V(v) \Leftrightarrow (\lambda \, id_V - u)(v) = 0 \Leftrightarrow v \in V_\lambda$. Más aún, por definición de valor propio, $V_\lambda \neq \{0\}$.

⚠ En todo lo que sigue supondremos que V es de dimensión finita. La teoría espectral de dimensión infinita será estudiada en Análisis Funcional.

Prop: Sea $u : V \to V$ endomorfismo y $\lambda \in k$ escalar. Entonces, λ es valor propio de u (ie, $\lambda \in \sigma(u)$) $\Leftrightarrow \det(\lambda \, id_V - u) = 0$.

Dem: $(\Rightarrow)$ Si $\lambda \in \sigma(u)$, existe $v \neq 0$ vector propio $\Rightarrow \lambda id_V - u$ no es inyectiva (pues $v \in V_\lambda = \ker(\lambda id_V - u)$). En part, $\lambda id_V - u$ no es un automorfismo $\Leftrightarrow \det(\lambda id_V - u) = 0$.

$(\Leftarrow)$ Dado que V de dim. finita: $\lambda id_V - u$ ~~~~ automorfismo $\Leftrightarrow$ inyectiva. Luego, $\det(\lambda id_V - u) = 0 \Rightarrow \lambda id_V - u$ no es inyectivo $\Rightarrow \exists v \neq 0$ tq $u(v) = \lambda v$ ∎

Terminología: Si $V_1, V_2 \subseteq V$ sub-e.v. Decimos que V es suma directa de V_1 y V_2 si todo elemento $v \in V$ se escribe de manera única como

$$v = v_1 + v_2 \quad , \quad \text{con } v_1 \in V_1 \, , \, v_2 \in V_2 .$$

En tal caso escribimos $V = V_1 \oplus V_2$. En otras palabras, la aplicación lineal $\rho : V_1 \times V_2 \to V$, $(v_1, v_2) \mapsto \rho(v_1, v_2) := v_1 + v_2$ es biyectiva.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ $V = V_1 \oplus V_2 \iff \begin{cases} a) \ V = \mathrm{Vect}_k(V_1, V_2). \\ b) \ V_1 \cap V_2 = \{0\}. \end{cases}$

$\boxed{\text{Ejercicio}}^*$ Definamos $\mathrm{Im}(\rho) := V_1 + V_2$. Probar que $V_1 + V_2 = \mathrm{Vect}_k(V_1, V_2)$ y que $\ker(\rho) = V_1 \cap V_2$. Deducir (eg. usando el Teorema del rango) que

$$\dim_k(V_1 + V_2) = \dim_k(V_1) + \dim_k(V_2) - \dim_k(V_1 \cap V_2).$$

Def: Sean $V_1, \dots, V_p \subseteq V$ sub-e.v. Diremos que V es suma directa de $V_1, \dots, V_p$ si la aplicación lineal

$$\rho : V_1 \times \dots \times V_p \to V \, , \, (v_1, \dots, v_p) \mapsto v_1 + \dots + v_p$$

es biyectiva, en cuyo caso escribimos $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_p$ o $V = \bigoplus_{j=1}^{p} V_j$.

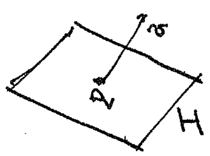
Si ρ es inyectiva, decimos que los $V_1, \dots, V_p$ están en suma directa.

Def: Sean $V_1, V_2 \subseteq V$ sub-e.v. Decimos que V_1 y V_2 son suplementarios si $V = V_1 \oplus V_2$.

Lema: Todo sub-e.v. de V admite un suplementario.

Dem: Sup. que $\dim_k(V) = n$ y sea $W \subseteq V$ sub-e.v. Si $W = \{0\}$ entonces W' es un suplementario. Si $\dim_k(W) = m \geq 1$, consideramos $(e_1, \dots, e_m)$ base de W. Completamos $(e_1, \dots, e_m)$ en una base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n)$ de V, y definimos $W' = \mathrm{Vect}_k(e_{m+1}, \dots, e_n)$. Luego, $V = \mathrm{Vect}_k(W, W')$ y $W \cap W' = \{0\}$ ■

Ejemplo: Sea $f : V \to k$ una forma lineal en V. Sup. que $f \neq 0$ y sea $H := \ker(f)$. Como $f \neq 0$, $\exists\, v \in V$ tq $f(v) \neq 0$ en k.
Reemplazando v por $f(v)^{-1} v$, podemos suponer que $f(v) = 1$.
$\Rightarrow \forall w \in V$, $f(w - f(w)v) = f(w) - f(w)\underbrace{f(v)}_{=1} = 0 \Rightarrow w - f(w)v \in \ker(f) = H$.
Así, $w = h + f(w)v$, con $h := w - f(w)v \in H \Rightarrow V = \mathrm{Vect}_k(H, v)$.
Por otro lado, si $\lambda v \in H \Rightarrow 0 = f(\lambda v) = \lambda \underbrace{f(v)}_{=1} \Rightarrow H \cap \mathrm{Vect}_k(v) = \{0\}$.
Conclusión: $V = H \oplus \mathrm{Vect}_k(v)$, i.e., H y la recta $\mathrm{Vect}_k(v)$ son suplementarios.



Decimos que H es un hiperplano en V.
$\underset{\text{Lema}}{\Rightarrow} \dim_k(H) = n - 1$.

Prop: Sean $V_1, \dots, V_p \subseteq V$ sub-e.v. tq $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_p$. Entonces:
1. $\dim_k(V) = \dim_k(V_1) + \dots + \dim_k(V_p)$
2. Si $\mathcal{B}_j$ es una base de V_j, para $j \in \{1, \dots, p\}$, entonces $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ es una base de V.

Dem: Dado que $\rho : V_1 \times \dots \times V_p \to V$ es un isomorfismo, tenemos que $\dim_k(V) = \dim_k(V_1 \times \dots \times V_p) = \dim_k(V_1) + \dots + \dim_k(V_p)$, de donde deducimos (1) ✓
Del mismo modo, $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ es generadora y, por (1), tiene el mismo cardinal, $\dim_k(V)$, de una base de V. Luego $\mathcal{B}$ es base de V (2) ✓ ■

Ejercicio importante: Sean $V_1, \dots, V_p \subseteq V$ sub-e.v. tq $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_p$ y sea $\mathcal{B}_j$ una base de V_j para cada $j \in \{1, \dots, p\}$. Sea $u : V \to V$ endomorfismo tq $u(V_j) \subseteq V_j$ $\forall j \in \{1, \dots, p\}$. Probar que

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & A_p \end{array}\right)$$

es una matriz diagonal por bloques, donde $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ y donde $A_j \in M_{n_j}(k)$ con $n_j = \dim_k(V_j)$.

Prop: Los sub-espacios propios de un endomorfismo asociados a valores propios distintos están en suma directa.

Dem: Por inducción en el número p de valores propios: $p=1$ ✓

Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ valores propios de $u: V \to V$ tq $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$.

Queremos probar que $\varphi: V_{\lambda_1} \times \dots \times V_{\lambda_p} \to V$, $(v_1, \dots, v_p) \mapsto v_1 + \dots + v_p$ es inyectiva, ie, si $v_1 + \dots + v_p = 0 \Rightarrow v_1 = \dots = v_p = 0$.

Al aplicar u a la ecuación $v_1 + \dots + v_p = 0$ obtenemos $0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$.

Si restamos $\lambda_1(v_1 + \dots + v_p) = 0$, obtenemos $(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \dots + (\lambda_p - \lambda_1)v_p = 0$.

$\underset{\text{Hip. Inducción}}{\Longrightarrow}$ $V_{\lambda_2}, \dots, V_{\lambda_p}$ están en suma directa y luego $(\lambda_j - \lambda_1)v_j = 0$ para $j = 2, \dots, p$. Como $\lambda_1 \neq \lambda_j \Rightarrow v_2 = \dots = v_p = 0$ y luego $v_1 = 0$ ■

Obs: Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ los valores propios (distintos) de $u: V \to V$. Entonces, $V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_p} := \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_p}) = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_p}$, pero no necesariamente $V = \bigoplus_{j=1}^{p} V_{\lambda_j}$. Más adelante: $V = \bigoplus_{j=1}^{p} V_{\lambda_j} \iff u$ es "diagonalizable".

Corolario: El número p de valores propios de $u: V \to V$ es $\leq \dim_{\mathbb{K}}(V)$.

Dem: Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ los valores propios de u. Luego: $\bigoplus_{j=1}^{p} V_{\lambda_j} \subseteq V$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{K}}(V_{\lambda_1}) + \dots + \dim_{\mathbb{K}}(V_{\lambda_p}) = \dim_{\mathbb{K}}\left(\bigoplus_{j=1}^{p} V_{\lambda_j}\right) \leq \dim_{\mathbb{K}}(V)$.

Dado que $\dim_{\mathbb{K}}(V_{\lambda_j}) \geq 1$ (pues $\exists\, 0 \neq v \in V_{\lambda_j}$ vector propio) $\Rightarrow p \leq \dim_{\mathbb{K}}(V)$ ■

§15. Endomorfismos diagonalizables

Def: Un endomorfismo $u: V \to V$ es diagonalizable si existe una base de V formada por vectores propios de u.

Obs: Si $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ es una base de V forma por vectores propios de u.

$$\Rightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \text{donde } u(v_j) = \lambda_j v_j.$$

Recíprocamente, si $\exists\, \mathcal{B}$ base de V tq $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ es diagonal, entonces necesariamente los vectores de $\mathcal{B}$ son vectores propios de u.

Prop: Sea $u: V \to V$ endomorfismo y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ los valores propios distintos de u. Son equivalentes:

① u es diagonalizable.

② $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_p}$.

③ $\dim_{\mathbb{K}}(V_{\lambda_1}) + \dots + \dim_{\mathbb{K}}(V_{\lambda_p}) \geq \dim_{\mathbb{K}}(V)$.

Dem: ③ $\Rightarrow$ ②: Vimos que $\varphi: V_{\lambda_1} \times \dots \times V_{\lambda_p} \to V$ inyectiva. Si ③ se verifica entonces φ biyectiva $\Rightarrow$ ② ✓

② $\Rightarrow$ ①: Sea $\mathcal{B}_j$ base de V_{λ_j} $\overset{②}{\Rightarrow}$ $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ base de V formada por valores propios $\Rightarrow$ ① ✓

① $\Rightarrow$ ③: Sea $\mathcal{B}$ base de vectores propios y sea n_j el número de vectores de $\mathcal{B}$ asociados a λ_j $\Rightarrow \dim_{\mathbb{K}}(V_{\lambda_j}) \geq n_j \Rightarrow \dim_{\mathbb{K}}(V_{\lambda_1}) + \dots + \dim_{\mathbb{K}}(V_{\lambda_p}) \geq n_1 + \dots + n_p = \dim_{\mathbb{K}}(V)$ ■