§13. Cálculo de determinantes

<u>Recuerdo</u>: Una matriz $A \in M_n(k)$ es llamada

a) <u>triangular superior</u> con términos diagonales $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ si es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & 0 & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

b) <u>triangular inferior</u> con términos diagonales $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ si es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ * & \lambda_2 & & \\ * & \ddots & \ddots & \\ * & \cdots & * & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a)' <u>triangular superior por bloques</u> si es de la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & * & * & * \\ \hline 0 & A_2 & * & * \\ \hline 0 & 0 & \ddots & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & A_m \end{array}\right)$$

donde $A_i \in M_{n_i}(k)$ son matrices tq $n_1 + \dots + n_m = n$, llamadas los <u>bloques de A</u>.

b)' <u>triangular inferior por bloques</u> si es de la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline * & A_2 & 0 & 0 \\ \hline * & * & \ddots & 0 \\ \hline * & * & * & A_m \end{array}\right)$$

donde $A_i \in M_{n_i}(k)$ son matrices tq $n_1 + \dots + n_m = n$, llamadas los <u>bloques de A</u>.

<u>Prop</u>: sea $A = \begin{pmatrix} A' & B \\ 0 & A'' \end{pmatrix} \in M_n(k)$ una matriz triangular superior por bloques, donde $A' \in M_p(k)$, $A'' \in M_q(k)$ con $p + q = n$. Entonces,

$$\det(A) = \det(A')\det(A'')$$

<u>Dem</u>: Sea $A = (a_{ij})$, entonces $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$.

Dada la forma de A, para que el término $a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$ sea no-nulo, se requiere que $\sigma(1), \dots, \sigma(p)$ (nº de fila) pertenezca a $\{1, \dots, p\}$, y luego tenemos que necesariamente $\sigma(p+1), \dots, \sigma(n) \in \{p+1, \dots, n\}$.

En otras palabras, existen permutaciones $\sigma' \in S_p$ y $\sigma'' \in S_q$ tq $\sigma(j) = \sigma'(j)$ si $1 \le j \le p$ y $\sigma(p+k) = p + \sigma''(k)$ si $1 \le k \le q$. Por abuso de notación: $\sigma = (\sigma', \sigma'')$.

Luego, $\det(A) = \sum_{\substack{\sigma = (\sigma', \sigma'') \\ \sigma' \in S_p, \sigma'' \in S_q}} \varepsilon(\sigma)\, a'_{\sigma'(1)1} \cdots a'_{\sigma'(p)p}\, a''_{\sigma''(1)1} \cdots a''_{\sigma''(q)q}$

y por otro lado, tenemos que $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma')\varepsilon(\sigma'')$ $\boxed{\text{Ejercicio}}$

$$\Rightarrow \det(A) = \underbrace{\left(\sum_{\sigma' \in S_p} \varepsilon(\sigma')\, a'_{\sigma'(1)1} \cdots a'_{\sigma'(p)p}\right)}_{\det(A')} \underbrace{\left(\sum_{\sigma'' \in S_q} \varepsilon(\sigma'')\, a''_{\sigma''(1)1} \cdots a''_{\sigma''(q)q}\right)}_{\det(A'')}$$

$$= \det(A')\det(A'') \quad \blacksquare$$

<u>Corolario</u>: Sea $A \in M_n(k)$ una matriz triangular superior (resp. inferior) por bloques dados por $A_1, \dots, A_m$ con $A_i \in M_{n_i}(k)$ tq $n_1 + \dots + n_m = n$, entonces

$$\det(A) = \det(A_1) \cdots \det(A_m).$$

En part, si $n_1 = \dots = n_m = 1$ y $A_i = (\lambda_i)$, ie, si A es triangular superior (resp. inferior) con términos diagonales $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, entonces $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.

<u>Dem</u>: Si A es triang. inferior por bloques, entonces ${}^tA$ es triang. superior por bloques y los bloques son los mismos. Así, dado que $\det(A) = \det({}^tA)$, podemos suponer que $A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & * & * \\ \hline 0 & \ddots & * \\ \hline 0 & 0 & A_m \end{array}\right)$ es triang. superior por bloques.

Notar que si definimos $A' := A_1$ y $A'' = \left(\begin{array}{c|c|c} A_2 & * & * \\ \hline 0 & \ddots & * \\ \hline 0 & 0 & A_m \end{array}\right)$, entonces $A = \begin{pmatrix} A' & B \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$ y luego $\det(A) = \det(A')\det(A'')$. Usando inducción en el número de bloques m obtenemos que $\det(A) = \det(A_1) \cdots \det(A_m)$.

Finalmente, si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, ie, si todos los bloques son de tamaño 1×1, entonces $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$. ∎

⚠ Si $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ C & A_2 \end{pmatrix} \in M_{2n}(k)$, con $A_1, A_2, B, C \in M_n(k)$, entonces <u>no</u> necesariamente $\det(A) = \det(A_1)\det(A_2) - \det(B)\det(C)$!

<u>Por ejemplo</u>: $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ cumple $\det(A_1) = \det(A_2) = \det(B) = \det(C) = 0$,

pero $\det(A) = -1 \neq 0$.

<u>Ejemplo</u>: Sea $A = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 12 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 9 & 0 & 10 & 0 \\ 7 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 11 & 0 & 12 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 9 & 0 & 10 & 0 \\ 7 & 5 & 8 & 6 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftrightarrow C_3}{=} - \begin{vmatrix} 11 & 12 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 9 & 10 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 5 & 6 \end{vmatrix} \underset{F_2 \leftrightarrow F_3}{=} + \left|\begin{array}{cc|cc} 11 & 12 & 0 & 0 \\ 9 & 10 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 4 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 5 & 6 \end{array}\right|$$

$$= \begin{vmatrix} 11 & 12 \\ 9 & 10 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = \underbrace{(110 - 108)}_{=2} \cdot \underbrace{(6 - 10)}_{=-4} = -8.$$

<u>Def</u>: Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$ y denotemos por $A_{ij} \in M_{n-1}(k)$ la matriz cuadrada obtenida al eliminar la i-ésima fila y la j-ésima columna de A. Diremos que

$$C_{ij} := (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

es el <u>cofactor de índice (i,j) de A</u>.

<u>Ejemplo</u> $(n = 2)$

Si $A = \begin{pmatrix} \overset{+}{a_{11}} & \overset{-}{a_{12}} \\ \underset{-}{a_{21}} & \underset{+}{a_{22}} \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ $C_{11} = +a_{22}$ $\quad C_{12} = -a_{21}$

$C_{21} = -a_{12}$ $\quad C_{22} = +a_{11}$

Teorema: Para todos $i,j \in \{1,\dots,n\}$ tenemos que:

① $\det(A) = a_{1j}C_{1j} + \dots + a_{nj}C_{nj}$ (desarrollo de la j-ésima columna).

② $\det(A) = a_{i1}C_{i1} + \dots + a_{in}C_{in}$ (desarrollo de la i-ésima fila).

Dem: Basta probar ①, pues $\det(A) = \det({}^tA)$. Fijemos $j \in \{1,\dots,n\}$ y veamos ①: Sea B_{ij} la matriz obtenida a partir de A reemplazando por 0 todos los elementos de la j-ésima columna, excepto el de la i-ésima fila:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & a_{ij} & & \\ & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \longmapsto B_{ij} := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & 0 & & \\ & & a_{ij} & & \\ & & 0 & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\qquad\quad \underbrace{\phantom{a_{n1}}}_{x_1} \qquad \underbrace{\phantom{a_{nj}}}_{x_j} \qquad \underbrace{\phantom{a_{nn}}}_{x_n}$$

Si $x_1,\dots,x_n \in k^n$ son las columnas de A y $x_j = a_{1j}e_1 + \dots + a_{nj}e_n$, donde $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ es la base canónica de k^n, entonces:

$$\det(A) = \det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n) = \det(x_1,\dots,x_{j-1}, a_{1j}e_1 + \dots + a_{nj}e_n, x_{j+1},\dots,x_n)$$
$$\underset{\text{det es multilineal}}{=} \det(B_{1j}) + \det(B_{2j}) + \dots + \det(B_{nj}).$$

Si hacemos pasar la j-ésima columna de B_{ij} a la primera posición, ie, si hacemos $j-1$ transposiciones de columnas, el determinante se multiplica por $(-1)^{j-1}$. Si luego de esto hacemos pasar la i-ésima fila a la primera posición, el determinante se multiplica por $(-1)^{i-1}$. Luego:

$$\det(B_{ij}) = \underbrace{(-1)^{(i-1)+(j-1)}}_{(-1)^{i+j}} \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i1} \cdots a_{in} \\ 0 & \\ \vdots & A_{ij} \\ 0 & \end{vmatrix} = a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij}) = a_{ij}C_{ij}. \quad \blacksquare$$

Ejemplo: Siempre conviene desarrollar una fila o columna con muchos ceros:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 6 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 3\left((-2)\underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}_{=2} + (-6)\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}_{=-10}\right) = 3\cdot(-4+60) = 168.$$

Def: Sea $A \in M_n(k)$. Definimos la comatriz de A por $\operatorname{com}(A) := (C_{ij}) \in M_n(k)$.

Prop: $A \cdot {}^t\operatorname{com}(A) = {}^t\operatorname{com}(A)\cdot A = \det(A)\cdot I_n$. En part, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,{}^t\operatorname{com}(A)$ si $A \in GL_n(k)$.

Dem: El término (i,j) de $A\cdot{}^t\operatorname{com}(A)$ es $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}C_{jk}$. Si $i=j$, el Teorema anterior dice que esto vale $\det(A)$ ✓

Si $i \neq j$, el teorema anterior dice que esto vale el desarrollo de la j-ésima fila del determinante de la matriz M_{ij} que se obtiene a partir de A copiando la i-ésima fila en la j-ésima fila ($\boxed{\text{Ejercicio}}$). Como M_{ij} tiene dos filas iguales, $\det(M_{ij}) = 0$, y luego $A\cdot{}^t\operatorname{com}(A) = \det(A)\cdot I_n$.

La igualdad ${}^t\operatorname{com}(A)\cdot A = \det(A)\cdot I_n$ se obtiene al desarrollar columnas. $\blacksquare$